Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2016
E. Cerpa, P. Guzmán

Variable Compleja - Tarea #2

Ejercicio 1 Sea $A \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Considere C una curva cerrada simple positivamente orientada tal que C y su región interior están contenidas en A. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dos puntos en el interior de C. Calcule

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz.$$

¿Qué se obtiene cuando $z_1 \to z_2$?

Ejercicio 2 Llamemos $D = \bar{D}(0,1)$ y consideremos $g : D \to \mathbb{C}$ una función continua. Sea Γ el borde de D recorrido en sentido positivo. Mostrar que

$$\overline{\int_\Gamma g(z) dz} = -\int_\Gamma \overline{g(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Sea A un dominio tal que $D \subset A$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Para $z_0 \notin \Gamma$, calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \overline{f(z)} \frac{dz}{(z-z_0)}.$$

Ejercicio 3 Demostrar que para $0 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_0^\infty \frac{z^n}{4^{n+2}}.$$

Ejercicio 4 Representar la función $\frac{z+1}{z-1}$ por su serie de Taylor centrada en 0 (indicando radio de convergencia) y por su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$, también centrada en 0.

Ejercicio 5 Suponga que $f(z)$ es una función analítica que coincide con $\tan(x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Muestre que la ecuación $f(z) = i$ no tiene solución. ¿Puede f ser entera?

Ejercicio 6 Sea $f(z)$ una función holomorfa en $D(0,1)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ y $f(0) = 0$. Muestre que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D(0,1)$.

Ejercicio 7 Suponga que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es entera y que la función $u(x,y)$ tiene una cota superior, es decir, $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) \leq K$ para todo (x,y) en el plano. Probar que u debe ser constante en todo el plano.

Ejercicio 8 Pruebe que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Para esto considere la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, dos números positivos $0 < r < R$ y el camino cerrado simple $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, en donde: γ_1 es la recta que une los puntos $z_1 = r$ con $z_2 = R$; γ_2 es la semi-circunferencia de radio R que une los puntos z_2 con $z_3 = -R$; γ_3 es la recta que une los puntos z_3 con $z_4 = -a$; y γ_4 es la semi-circunferencia de radio r que une los puntos z_4 con z_1.

Ejercicio 9 Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ una función inyectiva y holomorfa representada por la siguiente serie, $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$.

(a) Denotando por A el área de $f(D(0,1))$, pruebe que $A = \pi \sum_{n=0}^\infty n|a_n|^2$.

(b) Suponga que $|f(z)| < 2$ para todo $z \in D(0,1)$. Pruebe que $\sum_{n=0}^\infty n|a_n|^2 \leq 4$.