Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2016

E. Cerpa, P. Guzmán

Variable Compleja - Tarea #1

Ejercicio 1 Probar que

(*a*) Si un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ contiene a todos sus puntos de acumulación, entonces S debe ser un conjunto cerrado.

(*b*) Un conjunto $U \subset \mathbb{C}$ de cardinalidad finita, no puede tener puntos de acumulación.

Ejercicio 2 Mostrar que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2.$$

Ejercicio 3 Suponga que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y que f, g son derivables en z_0 con $g'(z_0) \neq 0$. Muestre que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Ejercicio 4 Muestre que $f(z) = e^x e^{-iy}$, con $z = x + iy$, no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 5 Considere la función $g(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$, con $z = x + iy$. Muestre que g es derivable y que g' también. Calcule $g''(z)$.

Ejercicio 6 Sea f una función analítica en un dominio $S \subset \mathbb{C}$ tal que $\forall z \in S$, se tiene $f(z) = 0$ ó $f'(z) = 0$. Pruebe que f es constante.

Ejercicio 7 Muestre que

(*a*) Si $f(z) = x^3 + i(1 - y)^3$, con $z = x + iy$, entonces la fórmula $f'(z) = 3x^2$ es válida solo cuando $z = i$.

(*b*) La función $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$, con $z = x + iy$, no es analítica en ninguna parte.

Ejercicio 8 Muestre que

(*a*) El conjunto de valores $\log(i^{1/2})$ es el mismo que $(1/2)\log(i)$.

(*b*) Los conjuntos $\log(i^2)$ y $2\log(i)$ son diferentes.

(*c*) La función $f(z) = Log(z - i)$ es analítica en todo z_0 que no pertenece al rayo $x \leq 0$ con $y = 1$.

Ejercicio 9 Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta.$$

Ejercicio 10 Calcule la integral de contorno de la función $g(z) = \pi e^{\pi\bar{z}}$ sobre la frontera del cuadrado de vértices $0, 1, 1 + i, i$, recorrida desde el 0 y con orientación positiva.

Ejercicio 11 Calcule la integral de contorno de la función

$$z^{-1+i} = \exp\big[(-1+i)\log z\big], \quad (r > 0,\ \ 0 < \theta < 2\pi)$$

sobre el círculo unitario $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 12 Para $R > 1$, sea C_R el círculo $|z| = R$ recorrido en sentido positivo. Muestre que

$$\int_{C_R} \frac{Log(z)}{z^2} dz$$

tiende a 0 cuando R tiende a ∞.

Ejercicio 13 Muestre que si $g(z) = u(x, y)$, es decir, g toma valores en $\mathbb{R}$, y además $|g| \leq 1$, entonces

$$\Big| \int_C g(z) dz \Big| \leq 4,$$

en donde C es el círculo unitario $z = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.