Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2016

Profesor: E. Cerpa. Ayudante: P. Guzmán

Certamen Global, MAT-235
Variable Compleja

Pregunta 1 Sea $f(z)$ analítica. Pruebe que también lo es $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Luego demuestre que si $h(z) = f(\bar{z})$ es analítica, entonces f es constante.

Pregunta 2 Considere un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contiene al disco de centro 0 y radio 2. Sea f una función analítica en Ω tal que

$$|f(z) - 1| < 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

Encuentre

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

para Γ cualquier curva suave contenida en Ω que va desde $z_1 = i$ hasta $z_2 = 1 + i$.

Pregunta 3 Sea $p = p(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y Γ un contorno cerrado simple que contiene en su interior a todos los zeros de p. Calcule

$$\int_\Gamma z \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

Pregunta 4 Representar la función $\frac{z+1}{z-1}$ por su serie de Taylor centrada en 0 (indicando radio de convergencia) y por su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$, también centrada en 0.

Pregunta 5 Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2}).$$

(Considere $f(z) = e^{2iz}/(1 + z^2)$, y un semi-círculo apropiado.)

Pregunta 6 Considere el primer cuadrante $(x > 0, y > 0)$ como una placa cuya temperatura $T(x, y)$ satisface las condiciones de borde:

- $T_y(x, 0) = 0$ si $0 < x < 1$,
- $T(x, 0) = 1$ si $x > 1$,
- $T(0, y) = 0$ si $0 < y$.

Encuentre una expresión para la distribución estacionaria de temperatura que alcanzará eventualmente la placa.

(Considere la transformación $z = \sin(w)$, con $z = x + iy$.)