Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2016
Profesor: E. Cerpa. Ayudante: P. Guzmán

Certamen 3, MAT-235
Variable Compleja

Pregunta 1 (30 puntos) Muestre que para todo $n > 2$ se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Pregunta 2 (35 puntos) Denotemos por $\mathcal{C}_M \subset \mathbb{C}$, con $M \in \mathbb{N}$, a la frontera del cuadrado cuyos vértices son $A = (M+1/2)(1+i)$, $B = (M+1/2)(-1+i)$, $C = (M+1/2)(-1-i)$ y $D = (M+1/2)(1-i)$. Considere una función meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de modo que existan $P > 0$ y $Q > 1$, independientes de $M \in \mathbb{N}$, tal que $|f(z)| \leq P/|z|^Q$ para todo $z \in \mathcal{C}_M$. Además, asuma que sus polos $\{z_1, \ldots, z_N\} \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, con $N \in \mathbb{N}$, están encerrados por la curva $\mathcal{C}_M$.

(i) Determine

$$I_M = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_M} f(z)\pi\cot(\pi z)\,dz.$$

(ii) Utilizando I_M y que $|\cot(\pi z)| \leq 2$ para todo $z \in \mathcal{C}_M$, deduzca que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = -\sum_{k=1}^{N} Res_{z=z_k} f(z)\pi\cot(\pi z).$$

Pregunta 3 (35 puntos) Considere el primer cuadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$ como una placa cuyos bordes están a temperatura $T = 0$ si $y = 0$ y $T = 1$ si $x = 0$. Encuentre una expresión para la distribución estacionaria de temperatura que alcanzará eventualmente la placa.

(Indicación: considere $w = Log(z)$.)