Universidad Técnica Federico Santa María — Semestre II, 2016
Departamento de Matemática — Profesor: E. Cerpa. Ayudante: P. Guzmán

Certamen 2, MAT-235
Variable Compleja

Pregunta 1 (30 puntos) Sea $p = p(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y Γ un contorno cerrado simple que contiene en su interior a todos los zeros de p. Calcule

$$\int_\Gamma z \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

(Indicación: considere factorizar p.)

Pregunta 2 (20 puntos) Probar que si $|z-1| < 1$, entonces

$$Log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$$

(Indicación: considere una serie de Taylor adecuada para $f(z) = 1/z$.)

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) Hallar la serie de Taylor centrada en 0 de $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$, indicando radio de convergencia.

(b) Probar que si $0 < |z-1| < 2$, entonces

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 3} = -\frac{1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

Pregunta 4 (30 puntos) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones analíticas. Para $\mathcal{C} \subset \Omega$, un contorno cerrado simple, defina $Z(f, \mathcal{C})$ como el número de ceros de f (considerando multiplicidad) que están dentro de $\mathcal{C}$. Suponga

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ para todo } z \in \mathcal{C}.$$

(a) En virtud de la desigualdad triangular, pruebe que $f + g \neq 0$ en $\mathcal{C}$. Como consecuencia de esto, pruebe que $f \neq 0$ en $\mathcal{C}$.

(b) Pruebe que en $\mathcal{C}$ se cumple

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}}.$$

(c) Recordando la fórmula

$$Z(f, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

demuestre que $Z(f+g, \mathcal{C}) = Z(f, \mathcal{C})$.