

Certamen 1, MAT-235 Variable Compleja

Pregunta 1 (10p) Resolver en \mathbb{C} la ecuación

$$\cos(z) = \sin(z).$$

Pregunta 2 (20p) Encuentre todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = xy + iy,$$

con $z = x + iy$, es derivable.

Pregunta 3 (20p) Sea $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, una función entera. Encuentre f y f' si sabe que

$$u(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2.$$

Pregunta 4 (20p) Sea Γ el círculo unitario recorrido con orientación positiva y $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calcule

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n} dz$$

(b) Deducir el valor de $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(t) dt$.

Observación: Para $a, b \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$, también se tiene la fórmula del binomio

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Pregunta 5 (20p) Sea f una función analítica en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que

$$|f(z) - 1| < 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

Muestre que

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para Γ cualquier curva suave cerrada contenida en Ω .

Pregunta 6 (10p) Considere la curva γ parametrizada por $z(t) = e^{it}$, con $t \in [0, \pi]$. Muestre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz \right| \leq \pi e.$$