Ayudantía N°9 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Para distintos casos de $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$, un contorno simple y cerrado, utilice series de Laurent para calcular lo que sigue.

(i) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2 \sin z} dz$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \exp\left\{z^2 + \frac{1}{z}\right\} dz$

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $f_n \in \mathbb{N}$ el n-ésimo número de Fibonacci, los que son calculados mediante: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.

(i) Considere $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ y pruebe que su radio de convergencia es al menos $1/2$.

(ii) Pruebe que $F(z) = 1/(1-z-z^2)$ para $|z| \leq 1/2$. Utilice la fórmula integral de Cauchy para encontrar una expresión para $f_n \in \mathbb{N}$.

(iii) Considere $G(z) = 1/(1-z-z^2)$. Sea $R > 0$ suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Pruebe que cuando $R \to \infty$ se obtiene

$$\int_{\partial B(0,R)} \frac{G(z)}{z^{n+1}} dz \to 0.$$

(iv) Utilizando lo anterior, pruebe

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

(3) **(Principio del Argumento)** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función meromorfa (función holomorfa salvo en sus polos). Para $\mathcal{C} \subset \Omega$ un contorno simple y cerrado, defina:

$Z(f, \mathcal{C})$ como el número de ceros de f, considerando multiplicidad, adentro de $\mathcal{C}$.

$P(f, \mathcal{C})$ como el número de polos de f, considerando multiplicidad, adentro de $\mathcal{C}$.

Suponiendo que f no tiene ni ceros ni polos en $\mathcal{C}$, demuestre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z(f, \mathcal{C}) - P(f, \mathcal{C}).$$