Ayudantía N°8 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Encuentre una fórmula que permita calcular:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ para $|z| < 1$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ para $|z| < 1$.

(2) Para $|z| < 1$ se cumple

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

Utilice esto para demostrar que para $1 < |z-1| < \infty$ se cumple

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{(z-1)^n}.$$

(3) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa de modo que $z_0 \in \Omega$ sea un cero de multiplicidad uno. Demuestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

(4) Suponga que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $B(0,R)$ para algún $R > 0$. Demuestre que para cada $r \in [0,R)$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$