Ayudantía N°7 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $f \in \mathbb{C}_n[z]$ si y solo si existen $(A, B) \in (0, \infty)^2$ tales que $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(2) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) f es constante en Ω.

(ii) Existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\{z \in \Omega \;/\; f(z) = \lambda\}$ tiene un punto de acumulación en Ω.

(iii) Existe $z \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) Encuentre la serie de Laurent de las siguientes funciones en el punto indicado, especificando su región de convergencia.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ con $z_0 = -2$.

(ii) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)}$ con $z_0 = 1$.

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^2}$ con $z_0 = 2$.