Ayudantía N°6 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Determine $\displaystyle\int_{\partial B(1,1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ para $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ la elipse parametrizara por $z(t) = (a\cos t) + i(b \sin t)$, en donde $a > 0$ y $b > 0$.

(i) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}$.

(ii) En virtud de lo anterior, deduzca que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

(3) Demuestre el Teorema Fundamental del Álgebra.
Sea $p \in \mathbb{C}_n[z]$ para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que existe al menos un $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

(4) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f'(z_0) \neq 0$. Pruebe que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,\varepsilon)} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

(5) Sea $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa de modo que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$. Pruebe que $|f'(0)| \leq 1$.