Ayudantía N°5 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $\mathcal{C} \subset \Omega$ un contorno simple y cerrado. Considere $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

(i) Pruebe que para todo $z_0 \in \Omega - \mathcal{C}$ y $k \in \{0, 1\}$ se cumple

$$n(\mathcal{C}, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

(ii) Demuestre que para todo $z_0 \in \Omega - \mathcal{C}$ se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

(2) Calcule lo que sigue

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^4 x}{1 + \sin^2(x)} dx.$

(3) Sea $R > 0$ y $(a, b) \in B(0, R)^2$. Considere $f : \overline{B(0, R)} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Evalúe

$$\int_{\partial B(0,R)} \frac{f(z)}{(z - a)^2 (z - b)^2} dz.$$

(4) (i) Para $R > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, considere una función holomorfa $f : \overline{B(z_0, R)} \to \mathbb{C}$. Pruebe que existe $M > 0$, dependiendo de $R > 0$, tal que para todo $z_0 \in B(0, R)$ es válida $|f'(z_0)| \leq M/R$.

(ii) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa acotada. Pruebe que f es constante.