Ayudantía N°4 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Sea $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Calcule $\displaystyle\int_{\partial B(z_0,R)} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$.

(2) El índice (o número de vueltas) de un contorno cerrado $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ con respecto a un punto $\alpha \in \mathbb{C} - \mathcal{C}$ es

$$n(\mathcal{C}, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha}.$$

(i) Pruebe que $n(\mathcal{C}, \alpha) \in \mathbb{Z}$.

Sugerencia: Sea $z : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$, con $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $t_1 < t_2$, una parametrización para $\mathcal{C}$. Para $t \in [t_1, t_2]$, defina $g(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{z'(\tau)}{z(\tau)-\alpha} d\tau$. Pruebe que $h(t) = [z(t) - \alpha] \exp\{-g(t)\}$ es constante en $[t_1, t_2]$.

(ii) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo tal que $\Omega \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Demuestre que $n(\mathcal{C}, \alpha)$ es constante para todo $\alpha \in \Omega$. Más aún, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tal que $\mathcal{C} \subset B(z_0, R)$. Entonces, $n(\mathcal{C}, \alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{C} - B(z_0, R)$.

Sugerencia: Demuestre que la función $f : \Omega \to \mathbb{Z}$ definida por $f(\alpha) = n(\mathcal{C}, \alpha)$ es continua, para concluir que $f(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto conexo.

(3) (i) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{z}$.

(ii) Determine $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{1+z^2}$.

(4) Sea $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tal que $|\alpha| < |\beta|$. Si $|\alpha| < R < |\beta|$, pruebe que se cumple

$$\int_{\partial B(0,R)} \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

Sugerencia: Evalúe $n(\partial B(0,R), \alpha) - n(\partial B(0,R), \beta)$.

(5) Para $n \in \mathbb{N}$ considere $p \in \mathbb{C}_n[z]$. Dado $\alpha \in B(0,R)$, con $R > 0$, demuestre que

$$\int_{\partial B(0,R)} \frac{p(z)}{z^{n+1}(z-\alpha)} dz = 0.$$