**Ayudantía N°3 de Variable Compleja (MAT-235)**

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Para $z \in \mathbb{C}$ se definen $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ y $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Demuestre que se cumplen las siguientes identidades.

(i) $\overline{\sin z} = \sin(\overline{z})$ y $\overline{\cos z} = \cos(\overline{z})$.

(ii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$ para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

(iii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

(iv) $\dfrac{d(\sin z)}{dz} = \cos z$ y $\dfrac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z$.

(2) Demuestre que la función $T(z) = z + 1/z$ mapea $\partial B(0, R)$, con $R > 0$, en elipses cuyos focos están en 2 y $-2$ cuando $R \neq 1$. ¿Qué sucede cuando $R = 1$?

**Sugerencia:** Escriba $z \in \mathbb{C}$ en su forma polar.

(3) Para $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| < 1$, considere la función $T_\alpha : B(0,1) \to B(0,1)$ definida por $T_\alpha(z) = \dfrac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$.

(i) Pruebe que $T_\alpha$ está bien definida.

(ii) Demuestre que $T_\alpha$ es biyectiva.

(iii) ¿Es verdad que $T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$?

(4) (i) Pruebe que la función $T(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ mapea $\partial B(0,1) - \{1\}$ al eje imaginario.

(ii) Considere una función holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo de modo que $f(\Omega) \subset \partial B(0,1) - \{1\}$. Demuestre que $f$ es constante en $\Omega$.

**Sugerencia:** Para $z \in \Omega$ defina $g(z) = (T \circ f)(z) = \dfrac{1 + f(z)}{1 - f(z)}$.