**Ayudantía N°2 de Variable Compleja (MAT-235)**

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

**Notación.** $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ denotan, respectivamente, la parte real e imaginaria de $z \in \mathbb{C}$. Las funciones reales $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ denotan, respectivamente, la parte real e imaginaria de la función compleja $f = f(z)$.

(1) Sea $u(x,y) = e^{-x}\,(x \sin y - y \cos y)$.

- (i) Encuentre una función real $v(x,y)$ de modo que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea holomorfa.
- (ii) Determine $f(z)$.

(2) Para $z \in \mathbb{C}$ considere la función $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,\{z\} + \overline{z}\,\mathrm{Im}\,\{z\} + \overline{z}$. ¿Para qué $z \in \mathbb{C}$ es posible determinar $f'(z)$? Calcule $f'(z)$ para aquellos $z \in \mathbb{C}$.

(3) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

- (i) Pruebe que si $u(x,y) = u(x)$ y $v(x,y) = v(y)$, entonces $f(z) = Az + B$ con $A \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathbb{C}$.
- (ii) Demuestre que si $u(x,y)v(x,y) = 1$, entonces $f$ es constante.

(4) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) $f$ es constante en $\Omega$.
- (ii) $\mathrm{Re}\, f$ es constante en $\Omega$.
- (iii) $\mathrm{Im}\, f$ es constante en $\Omega$.
- (iv) $\overline{f}$ es holomorfa en $\Omega$.
- (v) $|f|$ es constante en $\Omega$.