Ayudantía N°12 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

(i) Pruebe que si f es inyectiva en Ω, entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.

(ii) Sea $h : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ una función armónica. Defina $H(x,y) = h(u,v)$ en donde $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ y $v(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$. Demuestre

$$\triangle_{(x,y)} H = |f'(z)|^2 \triangle_{(u,v)} h.$$

(2) Para $0 < r_1 < r_2$ defina $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$.

(i) Pruebe que $\log z$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ en $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \ln r_1 \leq \operatorname{Re} z \leq \ln r_2\}$.

(ii) Utilizando (i), resuelva la ecuación $\triangle U = 0$ en Ω de modo que $U(x,y) = U_1 > 0$ para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 = r_1^2$ y $U(x,y) = U_2 > 0$ para los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 = r_2^2$.

(3) Sea $(T_0, T_1, T_2) \in \mathbb{R}^3$. Encuentre $T = T(x,y)$ armónica en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ tal que

$$\lim_{y \to 0^+} T(x,y) = \begin{cases} T_0 & , \quad x < -1, \\ T_1 & , \quad -1 < x < 1, \\ T_2 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

(4) Sean $(T_0, T_1, T_2) \in \mathbb{R}^3$ y $L > 0$.

(i) Pruebe que $\sin(\pi z/L)$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ -L/2 \leq \operatorname{Re} z \leq L/2 \ \wedge \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ en $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

(ii) Encuentre la temperatura en estado estacionario $T = T(x,y)$ de la semi-placa $[-L/2, L/2] \times [0,\infty)$ si se sabe que $T(x,0) = T_0$ para $x \in (-L/2, L/2)$ y $T(-L/2, y) = T_2$ con $T(L/2, y) = T_3$ para $y \in (0,\infty)$.