Ayudantía N°11 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) (i) Determine la imagen de $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z = 0\}$ bajo la transformación $f(z) = (z-i)/(z+i)$.

(ii) Para $R > 0$ fijo, encuentre la imagen de $\partial B(0,R)$ bajo la transformación $g(z) = (z + z^{-1})/2$.

(iii) Construya una transformación tal que la imagen de $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z = 0\}$ sea $[-1,1] \times \{0\}$.

(2) (i) Pruebe que $f(z) = e^z$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re} z \leq 0 \wedge 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ en $\{w \in \mathbb{C} \ / \ |w| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} w \geq 0\}$.

(ii) Pruebe que $g(z) = (z + z^{-1})/2$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 1 \ \wedge \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ en $\{w \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} w \leq 0\}$.

(iii) En virtud de lo anterior, deduzca que $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi \ \wedge \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ en $\{w \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} w \leq 0\}$.

(iv) Con un análisis similar al anterior, deduzca que $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ mapea $\{z \in \mathbb{C} \ / \ -\pi \leq \operatorname{Re} z \leq 0 \ \wedge \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ en $\{w \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} w \geq 0\}$.

(3) Sea f una función holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$ de modo que $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, en donde $m \in \mathbb{N}$. Para $k \in \{1,2\}$ considere curvas $C_k \subset \mathbb{C}$ junto con sus imágenes bajo f denotadas por $\Gamma_k = f(C_k)$, tal como se muestran en la Figura 1. Demuestre que $\overline{\alpha} = m\alpha$.

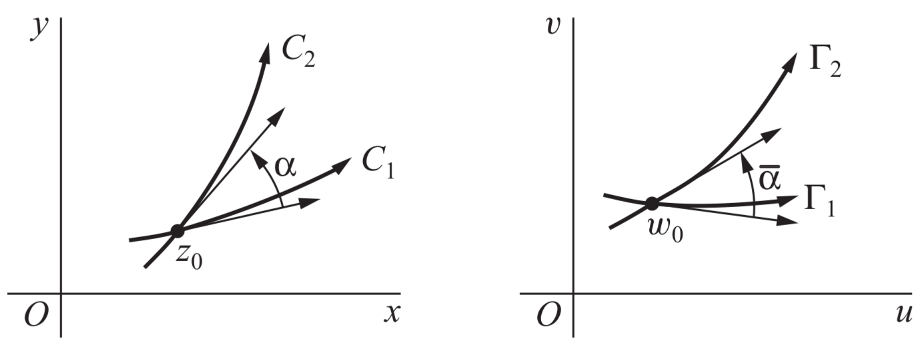

Figura 1: Ángulo entre curvas.