**Ayudantía N°10 de Variable Compleja (MAT-235)**

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Calcule lo que sigue.

(i) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \tan z\, dz.$

(ii) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{dz}{\sinh 2z}.$

(2) Sea $N \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\mathcal{C}_N \subset \mathbb{C}$ a la frontera del cuadrado cuyos lados están en las líneas $x = \pm(N+1/2)\pi$ e $y = \pm(N+1/2)\pi$. Pruebe que

$$\int_{\mathcal{C}_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 2\pi i \left[ \frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right].$$

¿Qué sucede cuando $N \to \infty$?

(3) Sea $f$ una función holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) \neq 0$. Defina la función $g(z) = 1/f(z)^2$. Pruebe que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de orden dos y que

$$Res_{z=z_0} g(z) = -\frac{f''(z_0)}{[f'(z_0)]^3}.$$

(4) Sea $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tal que $m < n$. Sea $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Definamos

$$z_k = \exp\left[ i\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right] \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{(2m+1)\pi}{2n}.$$

(i) Pruebe que $\displaystyle Res_{z=z_k}\left( \frac{z^{2m}}{z^{2n}+1} \right) = -\frac{1}{2n} e^{i(2k+1)\alpha}.$

(ii) Utilizando $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ para $z \neq 1$, determine $\displaystyle 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} Res_{z=z_k}\left( \frac{z^{2m}}{z^{2n}+1} \right).$

(iii) En virtud de lo desarrollado en los puntos anteriores, deduza un valor para $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} dx.$