

Ayudantía N°1 de Variable Compleja (MAT-235)

Profesor: Eduardo Cerpa

Ayudante: Patricio Guzmán

(1) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Pruebe las siguientes identidades.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right] &= -1, \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right] &= 0.\end{aligned}$$

(2) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Justifique que

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left[\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(3) (i) Sea $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $1 + z + z^2 + \dots = 1/(1-z)$ si $|z| < 1$.

(ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Demuestre que se cumplen

$$\begin{aligned}1 + \alpha \cos(\theta) + \alpha^2 \cos(2\theta) + \dots &= \frac{1 - \alpha \cos(\theta)}{1 - 2\alpha \cos(\theta) + \alpha^2}, \\ \alpha \sin(\theta) + \alpha^2 \sin(2\theta) + \dots &= \frac{\alpha \sin(\theta)}{1 - 2\alpha \cos(\theta) + \alpha^2}.\end{aligned}$$

(4) Demuestre lo que sigue.

(i) $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado si y solo si $\bar{\Omega} = \Omega$.

(ii) $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado si y solo si toda sucesión convergente de elementos de Ω tiene su límite en Ω .

(5) Determine $\lim_{x \rightarrow 2i} \frac{z - 2i}{z^4 - 16}$.

(6) Estudie la continuidad en \mathbb{C} de las siguientes funciones.

(i) $f(z) = z/(z^2 + 1)$.

(ii) $g(z) = (z^2 + 1)/(z - i)$ cuando $z \neq i$ y $g(z) = 3i$ cuando $z = i$.

(7) Pruebe que $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si y solo si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$ para toda sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.