Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 - Introducción a la Ingeniería (IWG 101)

Pauta

Profesor: Eduardo Cerpa
Fecha: 9 de septiembre 2015

Pregunta 1

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto en dos variables:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k + 2\alpha y_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ y_{k+1} &= x_k - 3y_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(a) Escriba el sistema en forma matricial.

(b) Dada una matriz $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se define su traza como $Tr(E) = a + d$. Recuerde además que $det(E) = ad - bc$. Muestre que los valores propios λ de la matriz E están dados por

$$\lambda = \frac{Tr(E)}{2} \pm \frac{\sqrt{Tr(E)^2 - 4det(E)}}{2}$$

(c) Determine para qué valores del parámetro α se tiene que x_k e y_k tienden a cero cuando $k \to \infty$.

Solución:

(a) Tenemos $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\alpha \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\alpha \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(b) Los valores propios λ son las raíces del polinomio característico de la matriz E. Es decir son las soluciones de $\lambda^2 - (a + d) + (ad - bc) = 0$, o equivalentemente, las soluciones de $\lambda^2 - Tr(E) + det(E) = 0$. Así obtenemos que $\lambda = \frac{Tr(E)}{2} \pm \frac{\sqrt{Tr(E)^2 - 4det(E)}}{2}$.

(c) Tenemos $Tr \begin{pmatrix} 3 & 2\alpha \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 0$, y $det \begin{pmatrix} 3 & 2\alpha \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -9 - 2\alpha$. Aplicando lo anterior vemos que los valores propios de esta matriz satisfacen $|\lambda| = \frac{1}{2}\sqrt{4(9 + 2\alpha)}$. La condición para que las soluciones x_k e y_k tiendan a cero cuando $k \to \infty$ es que $|\lambda| < 1$. Esto nos lleva a la condición $-4{,}5 < \alpha < -4$.

Pregunta 2

Tenemos una tienda que vende dos tipos de granos denominados A y B. Usemos $x \geq 0$ para denotar la cantidad (en toneladas) de productos tipo A que vendemos y $y \geq 0$ para la cantidad (en toneladas) de productos tipo B. Por razones de producción tenemos las siguientes restricciones

$$y \leq 2x + 2, \quad 2y \geq x - 2, \quad 2x \leq 5, \quad 4y \leq -3x + 12.$$

Nuestra ganancia viene dada por la función $f(x, y) = 6x + 3y$.

(a) Encuentre la producción (x^*, y^*) que maximice la ganancia.

(b) Mantenga las mismas restricciones y proponga una nueva función ganancia $g(x, y)$ tal que la esta se maximice en la producción $(x^* = \frac{4}{11}, y^* = \frac{30}{11})$.

Solución:

(a) Encontramos la región factible $\mathcal{R}$. Ver Figura 1. Es una región acotada por una poligonal. Sabemos que los extremos de f se alcanzarán en los vértices o aristas de $\mathcal{R}$. Las curvas de nivel de f están dadas por $y = -2x + c$, y los valores de la función crecen en la dirección $(6, 3)$. Vemos que $(x^* = \frac{5}{2}, y^* = \frac{9}{8})$ maximiza la ganancia.

(b) El punto $(x^* = \frac{4}{11}, y^* = \frac{30}{11})$ está en la intersección de la recta $y = 2x + 2$ con $y = -\frac{3}{4}x + 3$. Vemos que este punto será un máximo de g si, por ejemplo, sus curvas de nivel son del tipo $y = x + c$, y además g crece en la dirección $(-1, 1)$. Esto se logra con $g(x, y) = -x + y$.

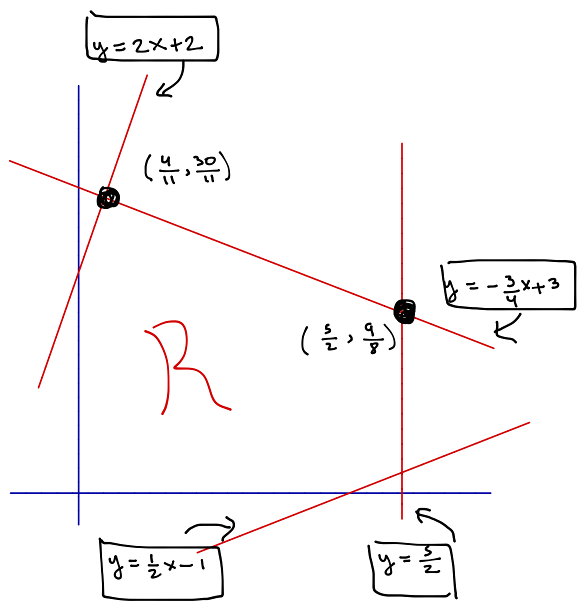

Figura 1: Región factible $\mathcal{R}$

Pregunta 3

El objetivo de esta pregunta es identificar el tipo de lugar geométrico que forman los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación

$$4x^2 + 4xy + y^2 - x + 2y = 0. \tag{1}$$

(a) Verifique que en notación matricial, la ecuación (1) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x - 2y.$$

(b) Encuentre matrices P y D tales que $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$.

(c) Considere nuevas variables (u, v) definidas por $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Encuentre la ecuación que satisfacen (u, v) si (x, y) satisfacen (1).

(d) Concluya.

Solución:

(a) Directo de verificar usando producto de matrices.

(b) Calculando los valores propios de $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$. Un valor propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $(1, -2)$ y uno asociado a $\lambda_2 = 5$ es $(2, 1)$. Así, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) Tenemos $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, o equivalentemente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 2v \\ -2u + v \end{pmatrix}$. Sustituímos estas expresiones en (1) y obtenemos $u = 5v^2$.

(d) En el plano (u, v) tenemos $u = 5v^2$, lo que representa una parabóla. Esto nos dice que también es una parábol (pero rotada) en el plano (x, y).

Tiempo: 120 minutos.