Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 2 - Introducción a la Ingeniería (IWG 101)
Pauta

Profesores: Eduardo Cerpa y Pedro Gajardo
Ayudante: Sebastián Torres
Fecha: 12 de julio 2014

Pregunta 1

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto en dos variables:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k}{2} + \alpha y_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ y_{k+1} &= 6\alpha\, x_k + \frac{3}{4} y_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Determine para qué valores de α se tiene que x_k e y_k tienden a cero cuando $k \to \infty$.

Solución: El sistema lo podemos escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 6\alpha & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 6\alpha & 3/4 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

lo que nos lleva a estudiar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ 6\alpha & 3/4 \end{pmatrix}$ y sus potencias A^k. Para esto, calculamos sus valores propios ya que sabemos que si sus valores propios λ son todos tales que $|\lambda| < 1$, entonces podemos concluir que $x_k \to 0$ e $y_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.
Calculando sus valores propios, se obtiene

$$\lambda_1 = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16} + 24\alpha^2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16} + 24\alpha^2}.$$

Para que no haya ningún valor propio con módulo mayor o igual a 1, tenemos la condición

$$\sqrt{\frac{1}{16} + 24\alpha^2} < \frac{3}{4},$$

es decir

$$|\alpha| < \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Pregunta 2

En un proceso industrial hay que elegir dos variables de produción denotadas por $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Sabemos que "y no puede ser mayor que 100 más el doble de x" y que "x no puede ser mayor que 100 más el doble de y". El costo de producción viene dado por una función $f(x, y) = ax + by$, en dónde a y b son constantes.

(a) Plantee el problema de Programación Lineal correspondiente al de producir buscando el mínimo costo posible. Dibuje la región factible R de puntos que satisfacen las restricciones.

Solución: El planteamiento del problema queda:

$$\text{Minimizar } \Big(ax + by\Big)$$
$$\text{Sujeto a las restricciones } x \geq 0, \quad y \geq 0,$$
$$y \leq 2x + 100, \quad x \leq 2y + 100.$$

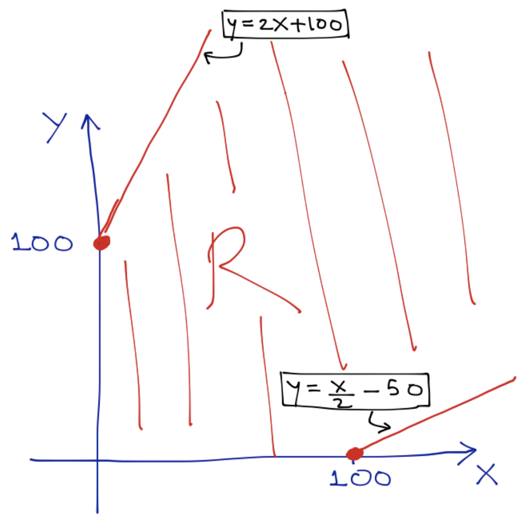

Figura 1: Región factible R

(b) Encuentre valores para a y b tales que el problema tenga una única solución dada por $(x = 100, y = 0)$.

Solución: Hay muchas elecciones posibles para a y b. En este caso podemos tomar valores tales que las curvas de nivel sean paralelas a $y = x/3$, es decir tales que $-3a = b$.

Para la función $f(x, y) = ax + by$, la dirección de máximo crecimiento está dada por el vector (a, b). Ahora, para que el mínimo esté en $(100, 0)$ podemos tomar (a, b) igual a $(-1, 3)$.

(c) Encuentre valores para a y b tales que el problema tenga infinitas soluciones y una de ellas sea $(x = 0, y = 100)$.

Solución: Hay muchas elecciones posibles para a y b. En este caso podemos tomar valores tales que las curvas de nivel sean paralelas a $x = 0$, es decir, tales que $b = 0$.

Para que todo el segmento que une $(0, 0)$ con $(0, 100)$ sean mínimos del problema, debemos tener $a > 0$. Por ejemplo $a = 1$.

(d) Encuentre valores para a y b tales que el problema no tenga ninguna solución.

Solución: Hay muchas elecciones posibles para a y b. La función debe decrecer hacia la parte *infinita* de R. Esto lo podemos lograr tomando $a = -1$ y $b = -1$. Las curvas de nivel son rectas paralelas a $y = -x$, y vemos que el valor de la función $f(x, y)$ decrece a medida que nos movemos en la dirección $(1,1)$. Al ser R un conjunto no acotado en la dirección $(1,1)$, siempre podemos encontrar valores menores de la función y así el problema de minimización no tiene solución.

Pregunta 3

Sean A y B dos matrices en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Como en el curso, denotaremos A^t la matriz traspuesta de A, y A^{-1} la matriz inversa de A. Demuestre las siguientes propiedades.

(a) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Solución: Consideremos una matriz invertible cualquiera $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tenemos que $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. De esta forma $(A^{-1})^t = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Calculando $(A^t)^{-1}$ se llega también a $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Solución: Para demostrar que una matriz C es la inversa de una matriz F, basta con ver que $CF = FC = I$, en donde I es la matriz identidad. En nuestro caso tenemos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

(c) A es invertible si y solamente si 0 no es valor propio de A.

Solución: Supongamos primero que A es invertible. Veamos que 0 no es valor propio. Por contradicción, supongamos que 0 es valor propio. Luego, existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{v} = \vec{0}$. Como A es invertible, podemos multiplicar esta última ecuación por A^{-1} y llegar a $\vec{v} = \vec{0}$, lo que es una contradicción. Luego, 0 no puede ser valor propio de una matriz invertible.

Si suponemos ahora que 0 no es valor propio, se tiene que $\det(\mathrm{A} - 0 \cdot \mathrm{I}) = \det(\mathrm{A}) \neq 0$ y, por lo tanto, se concluye que A es invertible.

Tiempo: 150 minutos.