Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Introducción a la Ingeniería (IWG 101)
Pauta

Profesores: Eduardo Cerpa y Pedro Gajardo
Ayudantes: Alonso Montejo y Alberto Rubio
Fecha: 9 de mayo 2015

Pregunta 1

Dado $M > 0$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto:

$$x_{k+1} = g(x_k) = \frac{M}{1 + x_k^{10}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demuestre que este modelo posee un equilibrio positivo.

Solución:
Para que el sistema tenga un equilibrio positivo, se debe tener que la función g tenga un punto fijo positivo, es decir, hay que probar existe un $\hat{x} > 0$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$. Esto se puede resolver de dos formas.

- (Forma 1) La función g es continua y tal que $g(0) = M$. Además, para todo x se tiene que

  $$g(x) = \frac{M}{1 + x^{10}} < M.$$

  Esto muestra que $g(x) \in [0, M]$ para todo $x \in [0, M]$ y, por lo tanto, por el Teorema de Punto Fijo visto en clases, g tiene un punto fijo $\hat{x}$ en el intervalo $[0, M]$. El caso $\hat{x} = 0$ se descarta ya que $g(0) \neq 0$.

- (Forma 2) Vemos que $g(\hat{x}) = \hat{x}$ si y solo si $g(\hat{x}) - \hat{x} = 0$. Por esto, basta con encontrar un cero de la función $f(x) = g(x) - x$.

  Evaluando, tenemos $f(0) = M > 0$ y $f(M) = \frac{M}{1+x^{10}} - M < 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio visto en clases, existe $\hat{x}$ tal que $f(\hat{x}) = 0$. El caso $\hat{x} = 0$ se descarta ya que $f(0) = M$.

Pregunta 2

La evolución de un recurso natural renovable, se modela a través de la siguiente expresión:

$$x_{k+1} = f(x_k) = x_k + 2 - |x_k - 2| \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Si al final de cada periodo, se extrae una proporción $h \in [0,1]$ del recurso disponible, la evolución bajo extracción del recurso, queda expresada por:

$$x_{k+1} = (1-h)f(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

1. Encuentre los equilibrios del modelo sin captura ($h = 0$).
2. Demuestre que si $0 \le h < 1/2$ existe un único equilibrio positivo.
3. Pruebe que para $h > 1/2$ no existen equilibrios positivos.
4. Demuestre que para $h = 1/2$, todo $x^* \in \ ]0,2]$ es un equilibrio positivo del modelo.
5. Sea x_h^* un equilibrio positivo del modelo al aplicar una tasa de extracción $h \in [0, 1/2]$. Determine la expresión de la cantidad del recurso que se extrae al equilibrio y determine h para el cual esta cantidad es máxima.

Solución:

1. La ecuación a resolver para encontrar el equilibrio es:

$$x = f(x) = x + 2 - |x-2|. \tag{1}$$

   Si existe una solución $x < 2$ de la ecuación (1), entonces

$$x = x + 2 - 2 + x \ \Rightarrow \ x = 0.$$

   Como $x = 0 < 2$ que es el supuesto utilizado, entonces $\bar{x} = 0$ es un equilibrio del modelo.

   Por otra parte, si existe un $x \ge 2$ solución de la ecuación (1), entonces

$$x = x + 2 - x + 2 \ \Rightarrow \ x = 4.$$

   Como $x = 4 \ge 2$ (supuesto utilizado), entonces $\bar{x} = 4$ es el segundo equilibrio del modelo.

2. Sea $0 \le h < 1/2$. La ecuación que describe los equilibrios del modelo con extracción es

$$x = (1-h)(x + 2 - |x-2|). \tag{2}$$

   Si existe una solución $x < 2$ de la ecuación (2), entonces

$$x = (1-h)(x + 2 - 2 + x) \ \Rightarrow \ x(1-2h) = 0.$$

   Como $(1-2h) \neq 0$ se deduce que $x = 0$ es un equilibrio pero no lo consideramos pues estamos buscando equilibrios positivos. Por lo tanto, el modelo no tiene equilibrios positivos menores a 2. Por otro lado, si existe un $x \ge 2$ solución de la ecuación (2), entonces

$$x = (1-h)(x + 2 - x + 2) \ \Rightarrow \ x = 4(1-h).$$

   Como $x = 4(1-h) \ge 2$ si $0 \le h < 1/2$, que es el supuesto utilizado y por lo tanto debemos chequear, entonces $x = 4(1-h)$ es el único equilibrio positivo.

3. Siguiendo los mismos pasos del desarrollo anterior, se deduce que no existe un equilibrio positivo menor a 2. Si existiera un equilibrio $\bar{x}$ mayor o igual a dos, entonces (también considerando el desarrollo anterior) este debe ser igual a $\bar{x} = 4(1-h)$, pero si $h > 1/2$, entonces $4(1-h) < 2$ por lo que este número no puede ser un equilibrio, concluyendo así que el modelo no tiene equilibrios positivos.

4. Para $h = 1/2$ la ecuación a resolver es

$$2x = x + 2 - |x-2| \;\Rightarrow\; |x-2| = 2 - x.$$

Observamos que todo $x \leq 2$ satisface la anterior ecuación. En particular, los $x \in \;]0,2]$ también la satisfacen, por lo que todo punto en el intervalo $]0,2]$ es un equilibrio positivo.

5. La ecuación que describe el equilibrio es

$$x = (1-h)(x + 2 - |x-2|).$$

Como la extracción se realiza al final de cada periodo, la cantidad que se extrae al equilibrio es $C(h) = h(x + 2 - |x-2|)$. De la ecuación del equilibrio, se deduce que

$$C(h) = h(x + 2 - |x-2|) = x + 2 - |x-2| - x = 2 - |x-2|.$$

La anterior función en $x = 0$ y en $x = 4$ es cero. Al graficar la función en términos de la variable x, se observa que para $x \leq 2$ es una recta que va desde el punto $(0,0)$ al punto $(2,2)$. Para los puntos $x \geq 2$ es una recta que va desde los puntos $(2,2)$ al punto $(4,0)$. Por lo tanto, esta función alcanza su máximo cuando $x = 2$. Por el desarrollo de los puntos anteriores, vemos que los equilibrios positivos cuando existen ($h \leq 1/2$) tienen la expresión $4(1-h)$, por lo tanto, la tasa de extracción h con la cual se maximiza la extracción al equilibrio es aquel h tal que $4(1-h) = 2$, concluyendo dicho h debe ser $h = 1/2$.

Pregunta 3

Considere la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde x_n está dado por

$$x_n = \frac{n}{n^2 - 3}.$$

1. Calcule el límite de la sucesión cuando $n \to +\infty$.
2. Utilizando la definición de límite, demuestre que el límite de la sucesión es el obtenido en el punto anterior.

Solución:

- Cálculo del límite:

$$\frac{n}{n^2 - 3} = \frac{n^2(1/n)}{n^2(1 - 3/n^2)} = \frac{(1/n)}{(1 - 3/n^2)}$$

Como $1/n$ tiende a 0 y $(1 - 3/n^2)$ tiende a 1, por álgebra de límite se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)}{(1 - 3/n^2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Hay que demostrar lo siguiente: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0,\ |x_n - 0| < \epsilon$.

  Consideremos $\epsilon > 0$ dado. Vemos que $\left(x_n = \frac{n}{n^2-3} < \epsilon\right)$ ssi $\left(n < \epsilon n^2 - 3\epsilon\right)$ ssi $\left(n^2 - \frac{n}{\epsilon} - 3 > 0\right)$.

  Debemos ver a partir de qué n_0 tenemos siempre que $\left(n^2 - \frac{n}{\epsilon} - 3 > 0\right)$. Este es un polinomio de grado dos en n y tiene dos raíces reales. Si n es mayor que la raíz más grande, estaremos seguros de que el polinomio es positivo.

  Esto implica que podemos tomar $n_0 = \left[\frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} + 12}\right] + 1$.

Tiempo: 150 minutos.