Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Introducción a la Ingeniería (IWG 101)
Pauta

Profesores: Eduardo Cerpa y Pedro Gajardo
Ayudante: Sebastián Torres
Fecha: 10 de mayo 2014

Pregunta 1

Dado $M > 0$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto:

$$x_{k+1} = f(x_k) = \frac{M}{1 + \mathrm{e}^{-x_k}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demuestre que este modelo tiene un equilibrio en el intervalo $[0, M]$.

Solución: Como $M > 0$ y $(1 + \mathrm{e}^{x}) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 \leq f(x) \leq M \qquad \forall\; x \in [0, M].$$

La anterior condición, por Teorema visto en clases, asegura la existencia de un punto $\bar{x} \in [0, M]$ tal que

$$f(\bar{x}) = \bar{x}$$

concluyendo así el resultado.

Pregunta 2

La evolución de un recurso natural renovable, se modela a través de la siguiente expresión:

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k + 2x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

donde K es un parámetro positivo dado.

Si al principio de cada periodo, se extrae una proporción $h \in [0, 1]$ del recurso disponible, la evolución bajo extracción del recurso, queda expresada como:

$$x_{k+1} = g((1 - h)x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Con respecto al modelo con extracción, considere los siguientes ejercicios:

1. Calcule los equilibrios del modelo.

   Solución: La ecuación que define los equilibrios del modelo con extracción es:

$$x = g((1-h)x) = (1-h)x + 2(1-h)x\left(1 - \frac{(1-h)x}{K}\right). \tag{1}$$

   Como x es factor común a todos los términos en la anterior expresión, una solución es $\bar{x} = 0$, es decir, **uno de los equilibrios del modelo es $\bar{x} = 0$.**

   Si la expresión (1) la dividimos por x (dado consideraremos ahora soluciones distintas de cero), se obtiene

$$1 = (1-h) + 2(1-h)\left(1 - \frac{(1-h)x}{K}\right)$$

   que es equivalente a

$$h = 2(1-h) - \frac{2(1-h)^2 x}{K}.$$

   Si $h = 1$ no hay otro equilibrio que el antes señalado ($\bar{x} = 0$), por lo tanto supondremos $h \in [0, 1[$. En tal caso, despejando x en la anterior igualdad, se obtiene

$$x = \frac{(2(1-h) - h)K}{2(1-h)^2}.$$

   Por lo tanto, para $h \in [0, 1[$, el segundo equilibrio -que depende de h y por eso lo notaremos $\bar{x}_h$- está dado por:

$$\bar{x}_h = \frac{(2(1-h) - h)K}{2(1-h)^2} = \frac{(2-3h)}{2(1-h)^2}K. \tag{2}$$

2. Determine para qué valores de h existe un equilibrio positivo.

   Solución: De la expresión (2) debemos imponer condiciones sobre h para que $\bar{x}_h$ sea positivo. Dado $K > 0$ y $2(1-h)^2 > 0$ para todo $h \in [0, 1[$, la condición se traduce a:

$$2(1-h) - h > 0 \;\Leftrightarrow\; 2 > 3h.$$

   Por lo tanto, para $h \in [0, 2/3[$ se obtiene que $\bar{x}_h > 0$.

3. Calcule el Máximo Rendimiento Sustentable (MSY) para este modelo, determinando el valor de h en el cual se alcanza y el equilibrio positivo que en tal caso se obtiene.

   Solución: Dado $h \in [0, 2/3[$, lo que se extrae en el equilibrio es $h\bar{x}_h$. Por lo tanto, la función que se desea maximizar, que la notaremos $z(\cdot)$, es:

$$z(h) = h\bar{x}_h = \frac{h(2-3h)}{2(1-h)^2}K.$$

   Como $K > 0$ es una constante, el problema es equivalente a maximizar

$$l(h) := \frac{z(h)}{K} = \frac{h(2-3h)}{2(1-h)^2}.$$

Definida la función $l(\cdot)$, debemos encontrar h^* tal que $l(h) \leq l(h^*)$ para todo h. En particular, vemos que para $h \notin [0, 2/3]$ se tiene $l(h) < 0$. Por otro lado, observamos que $l(0) = l(2/3) = 0$ y $l(h) > 0$ para todo $h \in]0, 2/3[$, por lo que el punto h^* que maximiza la función l debe encontrarse en el intervalo abierto $]0, 2/3[$.

Consideremos un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$l(h) = \frac{h(2-3h)}{2(1-h)^2} \leq \alpha \qquad \forall\ h \in \mathbb{R}.$$

La anterior expresión es equivalente a

$$0 \leq (2\alpha+3)h^2 - 2(2\alpha+1)h + 2\alpha. \tag{3}$$

El lado derecho de la anterior desigualdad es una función cuadrática en h. Para que tal desigualdad sea cierta para todo h, se debe tener que el discriminante, que notaremos Δ, de la función cuadrática, debe ser menor o igual a cero, es decir,

$$\Delta = 4(2\alpha+1)^2 - 8\alpha(2\alpha+3) \leq 0.$$

Por otro lado, si deseamos exista un h^* tal que $l(h) \leq l(h^*)$ para todo h, y si el α considerado lo tomamos igual a $l(h^*)$, entonces la desigualdad (3) debe ser una igualdad para h^*, lo que implica que la ecuación cuadrática

$$0 = (2\alpha+3)h^2 - 2(2\alpha+1)h + 2\alpha$$

debe tener al menos una solución. Para que ello suceda, el discriminante Δ de la función cuadrática debe ser mayor o igual a cero, es decir,

$$\Delta = 4(2\alpha+1)^2 - 8\alpha(2\alpha+3) \geq 0,$$

y, por lo tanto, se deduce $\Delta = 0$. El valor de α tal que $\Delta = 0$ se obtiene de

$$0 = \Delta = 4(2\alpha+1)^2 - 8\alpha(2\alpha+3) = 4(-2\alpha+1).$$

En consecuencia, el valor de α debe ser $1/2$.

Hasta el momento hemos obtenido que

$$l(h) \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\ h.$$

Si encontramos h^* tal que $l(h^*) = 1/2$, entonces aquel elemento es el buscado, pues

$$l(h) \leq \frac{1}{2} = l(h^*) \qquad \forall\ h.$$

Resolviendo la ecuación

$$l(h) = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ 4h^2 - 4h + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ (2h-1)^2 = 0,$$

se deduce que el h^* buscado es $h^* = 1/2$. El equilibrio $\bar{x}_h$ obtenido para este nivel de extracción, remplazando $h = 1/2$ en (2), es

$$x_{MSY} = K.$$

Pregunta 3

(a) Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

Solución: Observe que

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Como $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$, se deduce que $\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\to 2$ y, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}.$$

(b) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones dadas. Se define la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente:

$$c_{2n}=a_n,\quad \forall\ n\in\mathbb{N}.$$
$$c_{2n+1}=b_n,\quad \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Suponga que existe $L\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$. Demuestre por definición que

$$\lim_{n\to\infty}c_n=L.$$

Solución: Sea $\varepsilon>0$. Consideremos n_0^1 y n_0^2 en $\mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned}|a_n-L| &< \varepsilon \qquad \forall\ n\geq n_0^1\\ |b_n-L| &< \varepsilon \qquad \forall\ n\geq n_0^2.\end{aligned}$$

Si definimos $n_0=\max\{n_0^1,n_0^2\}$ de lo anterior se deduce

$$\begin{aligned}|a_n-L|=|c_{2n}-L| &< \varepsilon \qquad \forall\ n\geq n_0\\ |b_n-L|=|c_{2n+1}-L| &< \varepsilon \qquad \forall\ n\geq n_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|c_n-L|<\varepsilon \qquad \forall\ n\geq n_0$$

demostrando así que

$$\lim_{n\to\infty}c_n=L.$$

Tiempo: 150 minutos.