Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Ingeniería Civil Matemática

Certamen 1 - Introducción a la Ingeniería (IWG 101)

Profesores: Eduardo Cerpa y Pedro Gajardo
Ayudante: Sebastián Torres
Fecha: 10 de mayo 2014

Pregunta 1

Dado $M > 0$, considere el siguiente modelo a tiempo discreto:

$$x_{k+1} = f(x_k) = \frac{M}{1 + \mathrm{e}^{-x_k}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Demuestre que este modelo tiene un equilibrio en el intervalo $[0, M]$.

Pregunta 2

La evolución de un recurso natural renovable, se modela a través de la siguiente expresión:

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k + 2x_k\left(1 - \frac{x_k}{K}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

donde K es un parámetro positivo dado.

Si al principio de cada periodo, se extrae una proporción $h \in [0, 1]$ del recurso disponible, la evolución bajo extracción del recurso, queda expresada como:

$$x_{k+1} = g((1 - h)x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Con respecto al modelo con extracción, considere los siguientes ejercicios:

1. Calcule los equilibrios del modelo.

2. Determine para qué valores de h existe un equilibrio positivo.

3. Calcule el Máximo Rendimiento Sustentable (MSY) para este modelo, determinando el valor de h en el cual se alcanza y el equilibrio positivo que en tal caso se obtiene.

Pregunta 3

(a) Calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

(b) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones dadas. Se define la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente:

$$c_{2n} = a_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

$$c_{2n+1} = b_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Suponga que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$. Demuestre por definición que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L.$$

Tiempo: 150 minutos.