Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016
PROF: E. CERPA

Material de estudio
MAT-436 Control de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Pregunta 1 (Pregunta Certamen 2014. Prof: E. Cerpa y A. Mercado)
Considere el siguiente sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} y_t(t,x) - y_{xx}(t,x) = 0, & (t,x)\in(0,T)\times(0,\pi),\\ y_x(t,0)=0, \quad y_x(t,\pi)=h(t), & t\in(0,T),\\ y(0,x)=y_0(x), & x\in(0,\pi), \end{cases}$$

en donde y representa el estado, h el control e y_0 la condición inicial.

(a) Muestre que h lleva y_0 a 0 en tiempo $t=T$ si y solo si

$$(2)\qquad \forall\varphi_T, \quad -\int_0^\pi y_0(x)\varphi(0,x)dx = \int_0^T h(t)\varphi(t,\pi)dt$$

en donde φ es la solución de

$$(3)\qquad \begin{cases} -\varphi_t(t,x) - \varphi_{xx}(t,x) = 0, & (t,x)\in(0,T)\times(0,\pi),\\ \varphi_x(t,0)=0, \quad \varphi_x(t,\pi)=0, & t\in(0,T),\\ \varphi(T,x)=\varphi_T(x), & x\in(0,\pi). \end{cases}$$

(b) Plantee (2) como un Problema de Momentos. ¿Se puede resolver?

(c) Si para estudiar la controlabilidad a cero de (1), usáramos la dualidad con la observabilidad, ¿qué desigualdad debiésemos probar?

Pregunta 2 (Pregunta Certamen 2014. Prof: E. Cerpa y A. Mercado)
Estudiaremos el siguiente problema de control

$$(4)\qquad \begin{cases} y_{tt}(t,x) + y_{xxxx}(t,x) = 0, & (t,x)\in(0,T)\times(0,2),\\ y(t,0)=0, \quad y(t,2)=0, & t\in(0,T),\\ y_x(t,0)=h_1(t), \quad y_x(t,2)=h_2(t), & t\in(0,T),\\ y(0,x)=y_0(x), \quad y_t(0,x)=y_1 & x\in(0,2), \end{cases}$$

en donde (y,y_t) representa el estado, (h_1,h_2) el control e (y_0,y_1) la condición inicial. Suponga que si $h_1,h_2\in L^2(0,T)$, $y_0\in L^2(0,2)$ e $y_1\in H^{-2}(0,2)$, entonces existe una única solución $(y,y_t)\in C([0,T];L^2\times H^{-2}(0,2))$.

(a) Plantee el problema de control exacto y expréselo como la sobreyectividad de un operador lineal.

(b) Usando dualidad, escriba la desigualdad de observabilidad que es equivalente con la controlabilidad exacta de (4).

(c) En el caso $h_1 = h_2 = 0$, $y_0 \in H_0^2(0,2)$, $y_1 \in L^2(0,2)$, realice una estimación de energía que permita ver que el sistema es conservativo.

(d) En el caso (c) utilice un multiplicador de la forma $q(x)y_x(t,x)$ para demostrar un resultado de regularidad escondida asociado a la observabilidad.

(e) Plantee el problema de minimización que permite encontrar el control (h_1, h_2) que lleva el sistema desde la condición inicial $(0,0)$ a una condición final (y_{T0}, y_{T1}).

Pregunta 3 (Pregunta Examen Calificación 2014. Prof: E. Cerpa y A. Mercado)
Considere la ecuación:

$$(5) \qquad \begin{cases} z_t + z_{xxxx} + \lambda z_{xx} = 0, & (t,x) \in (0,T) \times (0,L), \\ z_{xx}(t,0) = u_1(t),\ z_{xx}(t,L) = 0, & t \in (0,T), \\ z_{xxx}(t,0) = u_2(t),\ z_{xxx}(t,L) = 0, & t \in (0,T), \\ z(0,x) = z_0(x), & x \in (0,L). \end{cases}$$

1. Determinar el sistema adjunto de (5).

2. Demostrar que la ecuación (5) es controllable a cero en tiempo $T > 0$ en $L^2(0,L)$ si y solo si para todo $z_0 \in L^2(0,L)$ existen $(u_1, u_2) \in L^2(0,T)^2$ tales que para todo $q_T \in L^2(0,L)$ se cumple

$$(6) \qquad \int_0^L z_0(x) q(0,x)\, dx = \int_0^T u_1(t) q_x(t,0)\, dt - \int_0^T u_2(t) q(t,0)\, dt,$$

donde $q = q(t,x)$ es la única solución del sistema adjunto.

3. Probar que el sistema (5) no es controlable con un solo control: Si $u_2 = 0$, entonces existe $z_0 \in L^2$ tal que no existe u_1 control a cero de z_0.
Sugerencia: Suponiendo que $\int_0^L z_0(x) \cos(\sqrt{\lambda} x)\, dx \neq 0$, tomar $q_T(x) = \cos(\sqrt{\lambda} x)$ en el sistema adjunto.

Pregunta 4 (Pregunta Examen Calificación. Prof: E. Cerpa y A. Mercado)
Sea $T > 0$, $\Omega = (0,1)$ y $Q = \Omega \times (0,T)$. Considere el problema de control del siguiente sistema acoplado

$$(7) \qquad \begin{cases} u_t - u_{xx} + u = v + h_1 \mathbf{1}_{\omega_1}, & (x,t) \in Q, \\ v_t - v_{xx} + v = u + h_2 \mathbf{1}_{\omega_2}, & (x,t) \in Q, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde ω_1, ω_2 son abiertos no vacíos de Ω y h_1, h_2 son controles.

Asuma que para todo $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, para todo $h_1 \in L^2(0,T; L^2(\omega_1))$, $h_2 \in L^2(0,T; L^2(\omega_2))$ el sistema (7) posee una única solución $(u,v) \in C([0,T]; L^2(\Omega)^2)$.

El objetivo de este problema es probar la controlabilidad a cero del sistema (7).

Asuma la siguiente desigualdad de observabilidad tipo Carleman para la ecuación del calor: Si $\omega \subset \Omega$ es un abierto no vacío, entonces existe $\varphi \in C^2(Q)$, $\lambda_0 > 0$ y $C > 0$, tal que para todo $\lambda > \lambda_0$

$$
\begin{aligned}
(8) \quad \int_\Omega |y(x,T)|^2 dx + \lambda^3 \iint_Q e^{2\lambda\varphi} |y|^2 dxdt + \lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi} |y_x|^2 dxdt \\
\leq C \iint_Q e^{2\lambda\varphi} |y_t - y_{xx}|^2 dxdt + C \int_0^T \int_\omega e^{2\lambda\varphi} |y|^2 dxdt
\end{aligned}
$$

para toda $y \in L^2(Q)$ tal que $y(0,t) = y(1,t) = 0$ y $(y_t - y_{xx}) \in L^2(Q)$.

(a) Determine el sistema adjunto de (7).

(b) Encuentre una desiguladad de observabilidad para el sistema adjunto, que caracterice la controlabilidad a cero del sistema (7).

(c) Demostrar la controlabilidad del sistema (7), (bajo condiciones adecuadas, que debe establecer, para ω_1, ω_2).
Sugerencia: usar la desiguladad (8) de manera adecuada.
Atención: la función peso φ y la constante C en (8) dependen de ω.

(d) Discuta sobre la posibilidad de controlar con un solo control, por ejemplo tomando $h_2 = 0$ en (7).