Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016

E. Cerpa

Algebra Lineal - Tarea #3

Ejercicio 1 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + 2y, y)$. Pruebe que T no es diagonalizable.

Ejercicio 2 Obtenga la diagonalización de $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal definida por $L(x, y, z) = (x + 2y + 10z, 2x + y + 10z, -x - y - 6z)$.

Ejercicio 3 Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales, y $L : V \to V$ la transformación lineal

$$L(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) = a_n + a_{n-1}x + ... + a_1x^{n-1} + a_0x^n.$$

Hallar los valores y vectores propios.

Ejercicio 4 Considere el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ provisto de la aplicación definida por:

$$\langle p, q\rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \qquad \forall p, q, \in \mathbb{R}_2[x]$$

1. Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Pruebe que los vectores $p(x) = 1$ y $q(x) = x$ son ortogonales con este producto interno.
3. Encuentre un tercer polinomio r tal que $\{p, q, r\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$, y luego calcule las coordenadas de $s(x) = 2x^2 + 3x - 1$ con respecto a esta base.

Ejercicio 5 En esta pregunta considere el e.v. $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = Tr(A^tB)$.

(*i*) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determine los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que $A \perp B$ y $C \perp B$.

(*ii*) Encuentre una base ortonormal del subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Big/ a - 3d = 0, \text{ y } c + 3b = 0 \right\}$$

Ejercicio 6 Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -2, 2, 2)$ y $v_3 = (1, 2, -3, -4)$. Encuentre el elemento en U más cercano a $z = (1, 2, -3, 4)$.

Ejercicio 7 Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, de dimensión finita, y con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideremos $\ell \in U^*$, un elemento del espacio dual.

(*i*) Demuestre que existe $\hat{v} \in U$ tal que $\forall u \in U$, $\ell(u) = \langle \hat{v}, u\rangle$.
(Considere una base ortonormal de U.)

(*ii*) Demuestre que el elemento $\hat{v}$ encontrado en el punto anterior es único.
(Suponga que existen dos elementos, $\hat{v}$ y $\hat{w}$, que cumplen la propiedad pedida.)