Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016

E. Cerpa

Algebra Lineal - Tarea #2

Ejercicio 1 Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el subespacio generado por $(1,1,1)$ y $(2,0,3)$.

Ejercicio 2 Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Pruebe que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes.

1. La intersección de la imagen de T con el núcleo de T es el subespacio $\{0\}$.
2. Si $T(T(\alpha)) = 0$, entonces $T(\alpha) = 0$.

Ejercicio 3 Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(p(x)) = (p(-1), p(0), p(1))$.

1. Demuestre que es lineal.
2. Determine $[T]_B^{\mathrm{D}}$, donde $B = \{1, x, x^2\}$, y D es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
3. Pruebe que T es un isomorfismo.
4. Determine T^{-1} y $[T^{-1}]_{\mathrm{D}}^{B}$

Ejercicio 4 Sea T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.

1. Encuentre la matriz representante con respecto a la base canónica.
2. Encuentre la matriz representante con respecto a la base $\{(1,2), (1,-1)\}$.
3. Pruebe que para todo $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $(T - cI_d)$ es invertible.
4. Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Denote A la matriz representante de T en esta base. Pruebe que

$$A_{1,2}A_{2,1} \neq 0.$$

Ejercicio 5 Considere la función $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{pmatrix}$$

Determine bases y dimensiones para la imagen y el núcleo de T.

Ejercicio 6 Sean V, W e.v. y considere $\varphi : V \to W$ una transformación lineal fija.

1. Considere el espacio M_φ^i de las transformaciones lineales $f : W \to V$ tales que $f \circ \varphi = 0$. Pruebe que si φ es sobreyectiva, entonces $M_\varphi^i = \{0\}$.
2. Considere el espacio M_φ^d de las transformaciones lineales $g : W \to V$ tales que $\varphi \circ g = 0$. Pruebe que si φ es inyectiva, entonces $M_\varphi^d = \{0\}$.

Ejercicio 7 Denotemos por V el espacio vectorial de todos los polinomios p de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuyo grado sea menor o igual a 2: $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$. Definamos los siguientes tres funcionales lineales en V:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx.$$

Muestre que $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para V^*. Para esto, encuentre la base de V de la cual $\mathcal{F}$ es dual.

Ejercicio 8 Considere $\mathbb{C}^n$ como un e.v. sobre $\mathbb{C}$ y la función $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definida por

$$H(z, w) = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k w_k, \quad \forall z = (z_1, z_2, ..., z_n), \forall w = (w_1, w_2, ...w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Demuestre que ReH e ImH son funciones multilineales, siendo esta última además alternada.

Ejercicio 9 Sea E un espacio vectorial de dimensión n con una base $\{e_k\}_{k=1,\cdots,n}$. Sea $\varphi : E \to E$ una transformación lineal tal que $\varphi(e_k) = \alpha_k e_k$ para cada $k = 1, \cdots, n$. Demuestre que

$$det(\varphi) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Ejercicio 10 Considere σ una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Calcule el determinante de T.

Ejercicio 11 Probar que:

1. $$\det\left[\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}_{n\times n}\right] = [x + (n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2. $$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & \dots & (\lambda_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\lambda_1)^{n-1} & (\lambda_2)^{n-1} & \dots & (\lambda_n)^{n-1} \end{pmatrix}\right] = \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$$

Ejercicio 12

1. Sea $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = 0$, si $i < j$. Pruebe que

$$\det(A) = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

2. Dada una matriz de $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y la matriz $B = \left[(-1)^{i+j} a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, pruebe que

$$\det(A) = \det(B).$$