Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016

E. Cerpa

Algebra Lineal - Tarea #1

Ejercicio 1 . Considere el sistema lineal a coeficientes reales siguiente

$$
\begin{aligned}
-x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 0,\\
x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 0,\\
\alpha x_1 + \beta x_2 &= 0,\\
\beta x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

Ejercicio 2 . Considere

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha - 3 \\ 2 & 1 & \alpha & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

Estudiaremos las soluciones del sistema $Ax = b$, con $x \in \mathbb{R}^4$. Encuentre los valores de α y β de manera que:

1. El sistema no tenga solución.
2. El sistema tenga una única solución. Encuentre la inversa de A y la solución del sistema.
3. El sistema tenga infinitas soluciones.

Ejercicio 3 . Probar que las siguientes matrices no son fila-equivalentes.

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 4 . Considere el sistema lineal a coeficientes reales siguiente

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1,\\
2x_1 + 2x_3 &= 1,\\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2.
\end{aligned}
$$

El sistema tiene solución? Si es así, encuéntrela(s).

Ejercicio 5 . Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 &= 3, \end{aligned}$$

no tiene solución.

Ejercicio 6 . Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Pruebe que si A no es invertible, entonces existe una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ no nula tal que $AB = 0$.

Ejercicio 7 . Una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se dice triangular superior si $A_{i,j} = 0\ \forall i, j$ tal que $i > j$. Probar que una matriz cuadrada triangular superior es invertible si y solo si todos los elementos en la diagonal son diferentes de cero ($A_{i,i} \neq 0$).

Ejercicio 8 . Considere el espacio de matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y los subespacios U, V dados por

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Determine la dimensión de los espacios $U, V, U + V$ y $U \cap V$.

Ejercicio 9 . En $\mathbb{R}_4(x)$ definimos los subconjuntos

$$S_1 := \{1 + x^2 + x^4, x - x^4, x + x^2 1 - x^3, 1 + x + x^3\}$$

y

$$S_2 := \{x + x^2, x + x^4, 1 + x\}.$$

Determine bases y dimensión de $U_1 = \langle S_1 \rangle$, $U_2 = \langle S_2 \rangle$, $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$.

Ejercicio 10 . Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\{(3 - k, -1, 0), (-1, 2 - k, -1), (0, -1, 3 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$$

genera un subespacio de dimensión 2?

Ejercicio 11 . Determinar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$W := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = z + w\} \subset \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 12 . Considere el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones de números reales . Vea que el conjunto $\{a_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n, i \in \mathbb{N},\ a_i(n) = \delta_{i,n}\}$ es linealmente independiente. Es una base del espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Observación: La función $\delta_{i,n}$ es la delta de Kronecker y toma el valor 1 si $i = n$ y el valor 0 si $i \neq n$.

Ejercicio 13 . Sea V un espacio vectorial y sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V. Pruebe que $V = W_1 \oplus W_2$ si y solo si para cada vector $\alpha \in V$ existe una única forma de escribir $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ con $\alpha_1 \in W_1$ y $\alpha_2 \in W_2$.

Ejercicio 14 . Encontrar la matriz de cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la formada por $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$ y $(0, -3, 2)$.

Ejercicio 15 . Sea V el espacio vectorial de las matrices $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tales que $A_{1,1}+A_{2,2} = 0$.

1. Encontrar una base para este espacio vectorial.
2. Sea W el conjunto de las matrices $A \in V$ tales que $A_{2,1} = \bar{A}_{1,2}$ (en donde la barra denota conjungado complejo). Probar que W es un s.e.v. de V y encontrar una base para W.

Ejercicio 16 . Sea $W = \langle\{(1, 0, i), (1 + i, 1, -1)\}\rangle \subset \mathbb{C}^3$.

1. Probar que los vectores dados son una base de W.
2. Mostrar que los vectores $\{(1, 1, 0), (1, i, 1 + i)\}$ son también una base para W.
3. Cuáles son las coordenadas de los vectores de la primera base usando la segunda base?

Ejercicio 17 . Considere una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible y un conjunto de n vectores linealmente independientes $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que los vectores

$$\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

son linealmente independientes.

Ejercicio 18 . Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Demuestre que

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

es un subespacio vectorial. Determine una base para W. Encuentre un subespacio U tal que $W \oplus U = \mathbb{R}^4$.