Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

GUIA 2 MAT210 1° 2015

1. Muestre que la aplicación lineal $F(x,y,z) = (x+z, 2y+z, -x+3z)$ no es diagonalizable.

2. Reducir las matrices a su forma diagonal o canónica:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3. Hallar la forma canónica de una matriz cuadrada A de tamaño 9x9 que se sabe que tiene a $\lambda = 2$ como autovalor con multiplicidad algebraica 5, $\lambda = -4$ como autovalor con multiplicidad algebraica 3 y $\lambda = 1$ como autovalor con multiplicidad simple. Se sabe además que:

$$rang(A-2I) = 7, \quad rang(A-2I)^2 = 5, \quad rang(A-2I)^3 = 4,$$

$$rang(A+4I) = 8, \quad rang(A+4I)^2 = 7, \quad rang(A+4I)^3 = 6$$

4. Sea $T : R_5[x] \to R_5[x]$ una aplicación lineal de la que sabemos que

   a) $Traza(A) = 13$ siendo A la matriz asociada a T en cierta base B de $R_5[x]$.

   b) $x^5 \in kerT$.

   c) $T(x^4 + x^5) = 7x^4 + 7x^5$ y $T(x^3 - x^2) = 3x^3 - 3x^2$

   d) El autoespacio asociado a un cierto autovalor λ está generado por los vectores $\{1; x; x^2 + x^3\}$.

   Es T diagonalizable?. Calcula la matriz asociada a T en la base canónica.

5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule los valores propios, su multiplicidad algebraica y geométrica, conluya si es o no diagonalizable, invertible.

   b) Sea $B = (A - 2I)$. Calcule $Ker(B^2)$ y verifique que existe $v \neq 0$ tal que

$$Ker(B^2) = Ker(B) \oplus < \{v\} >$$

6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el polinomio característico de A.

b) Determine de la manera más simple A^n, $n \in \mathbb{N}$.

c) Decida si A es invertible, en caso afirmativo use el Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar su inversa.

d) Calcular Traza, determinante y polinomio minimal de A.

e) Considere $M = \frac{1}{\sqrt{2}}A,$, muestre que es una matriz ortonormal.

7. Considere la forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$: $\varphi(x) = x^T Ax + F^T x$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $F \in \mathbb{R}^n$, para n fijo. Sabemos que A puede ser diagonalizable, en tal caso, existe una base de $\mathbb{R}^n$ en la cual podemos escribir $\varphi(y) = y^T y + G^T y$, para todo $y = Px$ con P la matriz de cambio de base correspondiente. En tal caso, se dice que la forma cuadrática está en forma canónica.

   a) Reduce la cónica $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 18x + 10y + 19 = 0$ a su forma canónica. Halla los ejes, el centro y los focos de la cónica correspondiente y dibújala.

   b) Indica el tipo y expresa en forma canónica la cónica $x^2+y^2+2xy-7x-5y+7 = 0$.

   c) Demuestra que las ecuaciones siguientes representan hipérbolas y encuentra sus asíntotas:

   $$x^2 + 4xy + y^2 = 7; \qquad 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y = -15$$

   d) Demuestra que las ecuaciones siguientes representan parábolas y encuentra su eje y su vértice:

   $$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0; \qquad 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 5$$