Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

GUIA 1 MAT210 1° 2015

1. Determine si los siguientes forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

   (a) $V = \{p(x) \in \mathbb{C}_n[x] : p(0) = 0\}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (b) $V = \{p(x) \in \mathbb{C}_n[x] : p(0) = 0\}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   (c) $V = \{p(x) \in \mathbb{C}_n[x] : p'(0) = 0\}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   (d) $V = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, tal que $f(\frac{a+b}{2}) = 0\}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   (e) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ tal que } a+b+c+d = 1 \right\}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. Sobre $V = \mathbb{R}^+$ se definen las siguientes operaciones:

   $x \oplus y = xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   Determine si V es o no un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones.

3. En $\mathbb{R}^n$ se definen las siguientes operaciones:

   $\overrightarrow{x} \oplus \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \odot \overrightarrow{x} = -\alpha \, \overrightarrow{x}, \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   ¿Qué axiomas de espacio vectorial se cumplen?

4. Considere un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V, definimos:

   $$V^\star = [U \subset V | \; U \text{es sub-espacio vectorial de } V]$$

   En $V^\star$ definimos las siguientes operaciones $[+], [\cdot]$ para $U, W \in V^\star$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

   $$U[+]W = (U+W) = \{u+v | \; u \in U, w \in W\}$$
   $$\alpha[\cdot]U = (\alpha U) = \{\alpha u |' u \in U\}$$

   Verifique si se cumplen los axiomas de espacio vectorial, cada uno de ellos, para $V^\star$ con las operaciones definidas.

5. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Determine si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

   (a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (c) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

   (d) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$ y $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

6. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \{(x,y,z) : x + 2y - 2z = 0,\ 2x + y + z = 0\}$

(b) $B = \{(x,y,z) : xyz \geq 0\}$

(c) $C = \{(x,y,z) : x = y^2,\ x + y + z \geq 0\}$

(d) $D = \{(x,y,z) : x \leq y \leq z\}$

7. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios del esp. vectorial indicado:

   (a) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(x) = p'(x)\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \int_0^1 x\, p(x)\, dx = 0\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

   (c) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

   (d) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA$ con $B \in M_n(\mathbb{R})$ fija$\}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

8. Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ y los vectores
   $u_1 = (1, 0, i)$ y $u_2 = (1 + i, 1, -1)$.

   (a) Demuestre que son l.i sobre $\mathbb{C}$.

   (b) Demuestre que $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (1, i, 1 + i) \in U = \langle u_1, u_2 \rangle$

   (c) Demuestre que los vectores w_1 y w_2 forman una base para U.

   (d) Determine las coordenadas de u_1 y u_2 en la base $\{w_1, w_2\}$.

   (e) Complete la base anterior a una base de $\mathbb{C}^3$.

9. Demuestre que el conjunto de todas las funciones de variable real es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con la suma y producto por escalar usuales. Demuestre que $B = \{f_n(t) = e^{nt},$ con $n \in \mathbb{N}\}$ es una familia linealmente independiente en este espacio vectorial. ¿Genera a todo el espacio de funciones?

10. Considere el espacio vectorial $M_2(\mathbb{K})$ de matrices 2×2. Considere los subespacios U y V:

    $$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{K}) : A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} \right\}$$

    $$V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{K}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \right\}$$

    Determine la dimensión de los subespacios U, V, $U + V$ y $U \cap V$.

11. Considere los subespacios $U_1 = \langle S_1 \rangle$ y $U_2 = \langle S_2 \rangle$ del espacio vectorial V. Determine bases y dimensión de U_1, U_2, $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$.

    (a) $S_1 = \{1 + x^2 + x^4, x - x^4, x + x^2 - x^3, 1 + x + x^3\}$, $S_2 = \{x + x^2, x + x^4, 1 + x\}$ en $V = \mathbb{R}_4[x]$.

    (b) $S_1 = \{1, 1 + x - x^2, 1 + x^2 - x^3, 1 + x^4 + x^5\}$, $S_2 = \{x^4 + x^5, 1 + x + 2x^2, 1\}$ en $V = \mathbb{R}_5[x]$.

12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u \in V$ y $S \subset V$ l.i. Demuestre que
    $S \cup \{u\}$ es l.i. $\iff$ u no es combinación lineal de elementos de S.

13. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas. Muestre que el conjunto $\{sin\,x,\ sin\,2x,\ sin\,3x\}$ es linealmente independiente.

14. Teorema Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{X} \subset \mathbf{V}$ un subconjunto. El $span\{(\mathbf{X})\} = \langle\{\mathbf{X}\}\rangle$ es el más pequeño subespacio de $\mathbf{V}$ que contiene a $\mathbf{X}$.

15. Pruebe que $span\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset span\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}\}$. Más aún, ¿Qué pasa si $v_{k+1} \in span\{v_1, v_2, ..., v_k\}$?.

16. Cómo están relacionados los siguientes subespacios

$$span\{u, v, w\}, span\{x, y\}, span\{u, v, w, x, y\}$$

$$span\{u, v, w\}, span\{v, w, x\}, span\{v, w\}$$

17. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ y $\{w_1, ..., w_m\}$ bases de V. Entonces para cada v_i, existe algún w_j tal que $\{v_1, ..., v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, ..., v_n\}$ es una base de V.

18. Considere a $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Cuál es la dimensión de este espacio vectorial? Justifique su respuesta.

19. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, justifique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

    (1) La condición para que $N \subset V$ sea sub-espacio que dice que 0_V debe estar en N puede ser sustituida por $V \neq \emptyset$ si se mantienen las otras dos condiciones.
    (2) Pueden existir 2 sub-espacios de V tales que su intersección sea solo un vector diferente del vector nulo.
    (3) Considere W otro espacio vectorial con el mismo cuerpo, N sub-espacio de V y M sub-espacio de W, entonces $N \times M$ es sub-espacio de $V \times W$.
    (4) Sean A, B, C sub-espacios de V. Supongamos que V tiene dimension n, ademas que la intersección de los tres sub-espacios es solo el vector neutro. Si la dimension de los espacios A, B y C suma n entonces V es suma directa de A, B y C.
    (5) Si A es un sub-espacio vectorial y ni a ni b, vectores, estan en A entonces $a+b$ no esta en A
    (6) Si A, B son subconjuntos de V y $A \subset B$ entonces el sub-espacio generado por A es sub-espacio del espacio generado por B.

20. Pruebe que la unión de dos sub-espacios vectoriales es sub-espacio vectorial si, y solamente si, uno de ellos esta contenido en el otro.

21. Considere $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}\}$ y ademas:

$$F_1 = \{\text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R} \text{ que se anulan en } [0, 1]\}$$

$$F_2 = \{\text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R} \text{ que se anulan en } [2, 3]\}$$

    Verifique que F_1, F_2 son sub-espacios de E y que $E = F_1 + F_2$ pero no se tiene que $E = F_1 \oplus F_2$.

22. Sean $F_1, \ldots, F_k$ sub-espacios vectoriales del espacio vectorial E. Pruebe:

    a)El sub-espacio generado por la unión $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ es el conjunto $F_1 + \ldots + F_k$ de las sumas $x_1 + \ldots + x_k$, donde $x_i \in F_i$ para i desde 1 hasta k

    b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    $i)$ Cada $x \in F_1 \cup \ldots \cup F_k$ se escribe de manera única como $x_1 + \ldots + x_k$.

    $ii)$ Para cada $j = 1, \ldots k$ se tiene que $F_j \cap (F_1 + \ldots + F_{j-1} + F_{j+1} + \ldots + F_k) = \{0_v\}$

23. Considere el conjunto

$$M = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ x_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}$$

    probar que M es un sub-espacios del espacio de todas las sucesiones de números reales y encuentre su dimensión.

24. En $\mathbb{R}^4$, demuestre que

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) :\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

    es un subespacio vectorial. Determine una base para W. Encuentre un subespacio U tal que $W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

25. Cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ son lineales?

    a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 x_2,\ x_2 - x_1,\ x_3,\ x_4)$.
    b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (\lambda x_2,\ x_2 - x_1,\ x_3,\ x_4)$.
    c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (0,\ x_3,\ x_2,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

26. Considere el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Demuestre que la aplicación

$$\varphi : f(t) \to t f(t)$$

    es lineal.

27. Sea E un k-espacio vectorial y $f_i : E \to k$ aplicaciones lineales, demuestre que

$$\begin{aligned} \varphi \ &: \ E \to k^n \\ &\quad\ x \to \varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{aligned}$$

    es lineal.

28. En $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, defina

$$\varphi : f(t) \to \int_0^t f(s) ds$$

    Determine (caracterice) el núcleo y la imagen de φ. Es φ inyectiva? Es φ biyectiva?

29. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x, y, z]$ sobre $\mathbb{R}$, formado por los polinomios de grado ≤ 3 en las variables x, y, z. Considere las siguientes transformaciones:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x} : \mathbb{R}_3[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x,y,z]$

(b) $\dfrac{\partial}{\partial y} : \mathbb{R}_3[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x,y,z]$

(c) $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}_3[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x,y,z]$

(d) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} : \mathbb{R}_3[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x,y,z]$

En cada caso, determine si la función es o no lineal. En caso afirmativo, determine dimensión del Kernel y de la Imagen.

30. Sea $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad L(p(x)) = p(x-1)$.

   (a) Demuestre que es lineal.

   (b) Determine $[L]_{B_1}^{B_2}, \quad$ donde $B_1 = \{1, x, x^2\}, \quad B_2 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$

   (c) Pruebe que L es un isomorfismo.

31. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(p(x)) = (p(-1), p(0), p(1))$.

   (a) Demuestre que es lineal.

   (b) Determine $[T]_{B_1}^{C}, \quad$ donde $B_1 = \{1, x, x^2\}, \quad$ y C es la base canónica.

   (c) Pruebe que T es un isomorfismo.

   (d) Determine T^{-1} y $[T^{-1}]_{B_1}^{C}$

32. Encuentre la matriz cambio de base entre B_1 y B_2:

   (a) En $\mathbb{R}^4$: $\quad B_1 = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$,
   $B_2 = \{0,0,0,1) \, (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)\}$

   (b) En $U \leq \mathbb{R}_3[x]$: $\quad B_1 = \{1-x, 1+x^2, 1-x^3\}$,
   $B_2 = \{3 - x - 2x^3, 4 - 3x + x^2, 2 - 2x - x^2 - x^3\}$

   (c) En $V \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $\quad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \right\}$,
   $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \right\}$

33. Sea $L : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que:
   $L(1) = x^2, \quad L(1+x) = x, \quad L(1+x+x^2) = 1, \quad L(1+x+x^2+x^3) = 0$

   (a) Determine $L(p)$ para cualquier $p \in \mathbb{R}_3[x]$

   (b) Determine $\text{Ker}(L)$ e $\text{Im}(L)$.

   (c) Encuentre $[L]$ en las bases canónicas respectivas.

34. Sea $L : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:
   $L(1) = (1,0,2,-1), \quad L(1+x) = (2,1,0,-1), \quad L(1+x+x^2) = (0,-1,4,-1)$

   (a) Determine una base para $\text{Ker}(L)$ y una para $\text{Im}(L)$.

(b) Determine $L(p)$ para cualquier $p \in \mathbb{R}_2[x]$

(c) Sea $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Determine la matriz L de la base B a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la matriz de L respecto a las bases canónicas en ambos espacios.

35. Pruebe que los operadores lineales $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidos por $E_{11}(x,y) = (x,0)$, $E_{12}(x,y) = (0,x)$, $E_{21}(x,y) = (y,0)$, $E_{22}(x,y) = (0,y)$, forman una base del espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Pruebe que otra base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ puede ser dada por $A(x,y) = (x+3y, y)$, $B(x,y) = (x,0)$, $C(x,y) = (x+y, x-y)$ y $I(x,y) = (x,y)$

36. Sean $P_1, \ldots P_k : E \to E$ operadores lineales tales que $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = I$ donde I denota el operador identidad y $P_j \circ P_i = 0$ si $i \neq j$, pruebe que estos operadores son proyecciones.

37. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y defina

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \qquad f_2 = e_2 + e_3, \qquad f_3 = e_3$$

(a) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(b) Determine qué se obtiene si se aplica Gram-Schmidt a la base $\{f_3, f_2, f_1\}$.

38. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior, definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Dado cualquier par de vectores $u, v \in V$ prueba que se cumple

$$< u, v >= 0 \iff \|u\| \leq \|u + \alpha v\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

39. Sea $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, ..., n$. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i} \right)^2$$

40. Sea V V Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior, definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $P \in \mathcal{L}(V)$ con las siguientes propiedades

(a) Dado cualquier vector $v \in V$, $P(P(v)) = P(v)$, esto es $P^2 = P$.

(b) Dado cualquier vector $u \in Ker(P)$ y cualquier vector $v \in Im(P)$ se tiene$< u, v >= 0$. Entonces P es una proyección ortogonal.

41. Considere el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ provisto de la aplicación definida por:

$$< p, q >:= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \qquad \forall p, q, \in \mathbb{R}_2[x]$$

(a) Demuestre que $< \cdot, \cdot >$ es un producto interior sobre $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Pruebe que los vectores $p(x) = 1$ y $q(x) = x$ son ortogonales con este p.i..

(c) Encuentre un tercer polinomio r tal que $\{p, q, r\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$, y luego calcule las coordenadas de $s(x) = 2x^2 + 3x - 1$ con respecto a esta base.

42. Suponga que $\{e_1, ..., e_m\}$ es un conjunto de vectores ortonormales de un espacio finito dimensional V . Sea $v \in V$. Pruebe que:

   (a) $\|v\|^2 \leq |<v, e_1>|^2 + |<v, e_2>|^2 + \cdots + |<v, e_m>|^2$

   (b) $\|v\|^2 = |<v, e_1>|^2 + \cdots + |<v, e_m>|^2 \Leftrightarrow v \in <\{e_1, ..., e_m\}>$.

43. Sea $V = \mathbb{R}^4$, y sea $U =< \{(1,1,0,0,),(1,1,1,2)\} >\leq V$. Encuentre $\bar{u} \in U$ tal que $\|\bar{u} - (1,2,3,4)\|$ sea lo más pequeña posible.

44. Considere el espacio de las funciones cuadrado integrales en $[-1,1]$ y sea $f(x) = \cos x$. Encuentre $\bar{p} \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\|\bar{p} - f\|$ sea lo más pequeña posible.

45. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere el espacio vectorial real $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interior definido por:
$$<p, q>= \sum_{j=1}^{n+1} p(j)q(j), \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}_n[x]$$

   (a) Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x + k$ y $q(x) = x - k$ sean ortogonales. Recuerde que $\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

   (b) Para $n = 3$ considere los siguientes subespacios $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(2) + p(3) = 0\}$ y $W = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(-x) = -p(x)\}$. Encuentre $S^\perp$ y $W^\perp$.

   (c) Encuentre una base ortonormal para $S, W, \mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$.

46. Consideremos $C([a,b],\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las fuciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$. Compruebe que las siguientes son normas:
$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{1/2} \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt \\ \|f\|_\infty &= \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \end{aligned}$$
Demuestre ademas que $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$ y $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.

47. Demuestre que
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{n}}\sin nt\right\}_{n=1,2,...}$$
forman un conjunto ortonormal de $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ con el producto interno
$$<f, g>= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

48. Demuestre que $<A, B>= tr(AB^*)$ es producto interno de $M^{n\times n}(\mathbb{C})$. Encuentre la formula de la norma $||A||$, inducida por este producto, en términos de los elementos de A y luego pruebe que esta norma satisface
$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \forall A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C}).$$