Universidad Técnica Federico Santa María — Semestre I, 2016
Departamento de Matemática — Profesor: E. Cerpa. Ayudante: I. Pinedo

Certamen 3, MAT-210
Algebra Lineal

Pregunta 1 (40 puntos) Considere $c \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudie si A es diagonalizable, encontrando, si corresponde, valores propios, multiplicidades algebraicas, espacios propios, multiplicidades geométricas, y las matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

Pregunta 2 (40 puntos) Dado $n = 2$ ó $n = 3$, considere $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado igual o menor a n, dotado del producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación definida por

$$T\Big(p(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dp(x)}{dx}\Big)$$

(a) Encuentre los valores propios y los vectores propios de T.

(b) Encuentre una base ortogonal $\{p_0, p_1, p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por vectores propios de T.

(c) Veamos ahora la misma aplicación T como una transformación de $\mathbb{R}_3[x]$ en $\mathbb{R}_3[x]$. Obtenga $p_3(x)$, un polinomio en $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ sea ortogonal.

(d) Verifique que $p_3(x)$ es también un vector propio de T.

Pregunta 3 (20 puntos) Sea U un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $L : U \to U$ una transformación lineal tal que $L \circ L = I$. Un operador que cumple esta propiedad se llama una involución.

(a) Demuestre que si λ es valor propio de L, entonces $\lambda \in \{-1, 1\}$. Dé un ejemplo de una involución cuyo único valor propio sea $\lambda = 1$. Dé otro ejemplo de una involución cuyo único valor propio sea $\lambda = -1$.

(b) Considere U_+ el espacio propio asociado a $\lambda = 1$ y U_- el espacio propio asociado a $\lambda = -1$. Demuestre que $U = U_+ \oplus U_-$.