Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016
Profesor: E. Cerpa. Ayudante: I. Pinedo

Certamen 2, MAT-210
Algebra Lineal

Pregunta 1 (30 puntos) Sea $L : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal definida por

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d) + (b+c)x + (a+b+2c+d)x^2.$$

Considere las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$

de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente. Encuentre la matriz representate de L con respecto a estas bases. Encuentre también el núcleo de L.

Pregunta 2 (30 puntos) Sea $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un vector y sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Considere $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ el único vector solución de $A\vec{x} = \vec{b}$.

1. Vea que $\vec{b} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i$, en donde $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ son los vectores columna que forman la matriz A, es decir, $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n]$.

2. Sea $A_b^i \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz que se obtiene al reemplazar la i-ésima columna de A por el vector $\vec{b}$, es decir, $A_b^i = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{b}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n]$. Pruebe que $\det(A_b^i) = x_i \det(A)$.

Pregunta 3 (40 puntos) Considere E, F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una función $T : E \to F$ se dice afín si tiene la propiedad siguiente:

$$T\big((1-\alpha)u + \alpha v\big) = (1-\alpha)T(u) + \alpha T(v), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E.$$

Sea T una función afín.

1. Suponga que $T(0) = 0$. Pruebe que $T(\alpha v) = \alpha T(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in E$.

2. Suponga que $T(0) = 0$. Verifique que $T\big(\frac{1}{2}(u+v)\big) = \frac{1}{2}\big(T(u) + T(v)\big), \forall u, v \in E$. Ocupe lo anterior para demostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in E$.

3. Pruebe que si $b \in F$, entonces la función $S : E \to F$, definida por $S(v) = T(v) + b$, es una función afín.

4. Pruebe que existe una transformación lineal $L : E \to F$, y un elemento $b \in F$ tal que $T(v) = L(v) + b, \quad \forall v \in E$.