Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Certamen No 2 MAT210 1° 2015

1. Sea
$$V = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \quad A = A^2 \ \text{ y } \ a_{11} + a_{22} = 0\}$$

   a) Pruebe que es un espacio vectorial en el cuerpo adecuado.

   b) Determine una base de V.

   c) Considere $W = \{A \in V : \quad a_{21} = -\overline{a_{22}}\}$, deducir si es un subespacio de V y en caso afirmativo encuentre una base.

2. Encuentre el gráfico que representa geométricamente la ecuación $4x^2 + 8xy + y^2 - 2y + 2x = 3$.

3. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule los valores propios, su multiplicidad algebraica y geométrica, conluya si es o no diagonalizable, invertible.

   b) Sea $B = (A - 2I)$. Calcule $Ker(B^2)$ y verifique que existe $v \neq 0$ tal que
$$Ker(B^2) = Ker(B) \oplus < \{v\} >$$

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita dotado de un producto interior. Sea $v \in V$, no nulo y fijo. Considere el operador $T : V \longrightarrow V$, tal que
$$T(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

   a) Muestre que T es lineal y continuo.

   b) Muestre que sus valores propios son $\sigma(T) = \{0, 1\}$

   c) Mueste que los espacios propios son $\langle\{v\}\rangle^\perp$ y $\langle\{v\}\rangle$, respectivamente.

   d) Utilizando la parte anterior, demuestre que T es un operador diagonalizable.

5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determine una matriz P que diagonalize la matriz A y calcule la n-ésima potencia.

   b) Usando la información anterior, justifique que A es invertible y usando el Teorema de Cayley-Hamilton determine una expresión para la inversa en términos de las potencias de A.

6. Determine el polinomio caracteístico de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton y el Teo. del Binomio, determine la n-ésima potencia de $(A + 2I)$. (Obs: el Teo del Binomio para matrices es el mismo que para escalares siempre que las matrices conmuten).

Teorema de Cayley Hamilton: Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión n. Si p es el polinomio caracteístico de T, entonces $p(T) = 0 \in \mathcal{L}(V)$ y $p([T]_B) = 0 \in \mathcal{M}_{n\times n}$, en cualquier base B de V.