Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2016
Profesor: E. Cerpa. Ayudante: I. Pinedo

Certamen 1, MAT-210
Algebra Lineal

Pregunta 1 (20 puntos) Hallar los valores del parámetro γ que hacen compatible el siguiente sistema, y resolverlo en esos casos:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0, \\ 2x + y - 3z &= 5, \\ -x + 7y + 9z &= \gamma. \end{aligned}$$

Pregunta 2 (40 puntos) Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y

$$W := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \Big/ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

1. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
2. Determine una base $\mathbb{B}_W$ para W y su dimensión.
3. Encuentre para $\mathbb{R}^4$ una base $\mathbb{B}_1$ que contenga a $\mathbb{B}_W$.
4. Encuentre las matrices cambio de base entre la base canónica $\mathbb{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ y la base $\mathbb{B}_1$.

Pregunta 3 (40 puntos)

1. Se considera el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere V el conjunto de todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$$

   Pruebe que V es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, encuentre una base e indique su dimensión.

2. Sea B una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Denotemos, para cada $i = 1, \cdots, m$, por $\vec{\beta}_i \in \mathbb{R}^n$ el vector compuesto por la la i-ésima fila de B. Suponemos que

$$\dim \langle \{ \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\beta}_3, \cdots, \vec{\beta}_m \} \rangle = 1.$$

   Demuestre que existen m reales $c_1, c_2, \cdots, c_m$ y n reales $d_1, d_2, \cdots, d_n$ tales que

$$B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \Big(d_1, d_2, \cdots, d_n \Big).$$