Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

CERTAMEN 1 MAT210 1° 2015

Nombre:____. **ROL:**________________.

Estudie cada una de las siguientes afirmaciones, demuéstrela si es verdadera ó dé un contraejemplo si es falsa.

1. Sea $V = \{0, 1\}$ un conjunto, y considere además el cuerpo $\mathbb{R}$. Defina en V las siguientes operaciones:

   Suma:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

   Producto por escalar para $x \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0, && \forall x \in \mathbb{R} \\ 1 \cdot x &= 1, && \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

   V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones.

2. Para toda transformación lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\exists v \in \mathbb{R}^5$, $v \neq 0$ tal que $f(v) = 0$.

3. Sean V, W un $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales, y se T una transformación lineal de V en W. Luego, la imagen de un conjunto l.d es l.d.

4. En $\mathbb{R}^2$, considere la transformación lineal tal que $T(e_1) = (1,1), \quad T(e_2) = (-1,2)$. Luego, la imagen del cuadrado de vértices $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ es un paralelógramo.

5. Sea $S = \{s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : s \text{ es función}\}$. Entonces, el espacio de las suceciones $\{u_n\}$ cuyos elementos satisfacen una relación recursiva del tipo $u_n = c \cdot u_{n-1}, \quad c =$ cte., constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 1.

6. Si $n < m$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces T es inyectiva.

7. Si $b \in \langle\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\rangle$ con a_i la columna i de una matriz cuadrada A, entonces la ecuación $Ax = b$ tiene al menos una solución.

8. Sea $T : V \longrightarrow V$, con $\dim(V)$ finita, un operador lineal tal que $T^2 = ToT = 0$, muestre que $I - T$ es invertible.

9. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto l.i., demuestre que el conjunto $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \cdots, v_1 + v_2 + v_3 \cdots + v_n\}$ tambien es l.i.

10. Cual o cuales de los siguientes espacios no es isomorfo a los demas $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, $V = \{(x, y, z, t) : \; x + y + z + t = 0\}$.

11. Sea $T : V \longrightarrow W$ lineal e inyectiva, entonces se cumple que

   i) Si dim(V)<dim(W) entonces T es sobreyectivo.
   ii) Si dim(V)=dim(W) entonces $[T^{-1}]_{B_W}^{B_V}$ existe.
   iii) Si $V = W$ entonces Ker(T)$\leq$ Im(T).

   a) i) y ii)   b) i) y iii)   c) Todas   d) solo i)

12. Cuales de las siguientes proposiciones es verdadera

   i) Si $\{u, v, w\}$ es l.i. entonces $\{u, v\}$ es l.i.
   ii) Si dim(V)=n y $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \subset V$ es un conjunto l.i., entonces $m \leq n$
   iii) Si $\langle\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}\rangle \leq V$ entonces $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ es base de V.

   a) i) y iii)   b) sólo i)   c) i) y ii)   d) Todas

Desarrollo

1. En $\mathbb{R}_3[x]$ consideremos los subespacios

$$A = \{p(t) : tp'(t) - kp(t) = 0, k \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{p(t) : t^2 p''(t) - tp'(t) = 0\}$$

   a) Calcular, en función del valor de k, la dimensión y una base de A.

   b) Calcular la dimensión y una base de B.

   c) Discutir, en función del valor de k, si A y B son subespacios suplementarios, es decir, si $\mathbb{R}_3[x] = A \oplus B$.

2. Sea V un espacio vectorial con producto interior. Sea $v \in V$ fijo. Considere la proyección de cualquier vector $w \in V$ en v.

   a) Define el operador E que corresponde a la proyección. Pruebe que es lineal y que cumple que $E^2 = E$.

   b) Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$, con el producto usual de las funciones en $[-1, 1]$. Sea $v = (3x^2 - 1)/2$. Calcule E, defina $Ker(E)$ e $Im(E)$