Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre I, 2011

E. Cerpa, N. Varela

Certamen 1, MAT-210
Algebra Lineal

Pregunta 1 . Considere dos parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \alpha \\ 2 & 1 & (\alpha+3) & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos las soluciones del sistema $Ax = b$, con $x \in \mathbb{R}^4$. Encuentre los valores de α y β de manera que:

1. El sistema no tenga solución.
2. El sistema tenga una única solución. Encuentre la inversa de A y la solución del sistema.
3. El sistema tenga infinitas soluciones.

Pregunta 2 . Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

es un subespacio vectorial. Determine una base $\mathbb{B}_W$ para W. Encuentre un subespacio U tal que $W \oplus U = \mathbb{R}^4$. Encuentre una base $\mathbb{B}_U$ de U y las matrices cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base $\mathbb{B}_W \cup \mathbb{B}_U$.

Pregunta 3 . Considere F el espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) siguiente $F := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$. Sea U el subconjunto de F de todas las funciones que satisfacen $f(0) = f(2\pi) = 0$. En $F \times F$ se define la aplicación

$$(f, g) \in F \times F \longmapsto P(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Verifique que efectivamente $P(f, g) \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in F$. Indicación: use la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$.
2. Pruebe que $P(f, f) = 0$ si y solamente si $f = 0$.
3. Compruebe que U es un s.e.v. de F y que $W = \{\sin(nx)\}_{n \geq 1} \subset U$
4. Use la identidad $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx) = \pi\delta_{n,m}$, para verificar que el conjunto $\{\sin(nx)\}_{n \geq 1}$ es linealmente independiente ¿Es F un e.v. de dimensión finita?