Ayudantía N°9

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Ayudantía 9

1. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema: *(Regla de Cramer)* Dada una matriz invertible $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces la solución $x \in \mathbb{R}^n$ del sistema
   $$A \cdot x = b$$
   cumple que
   $$x_j \cdot \det(A) = \sum_{k=1}^{n} cof(a_{kj})b_k \ , \ j = 1, \ldots, n \ ,$$
   donde
   $$cof(a_{ij}) = \det(C_{ij}) \ , \ i, j = 1, \ldots, n$$
   es el *cofactor de la posición* (i, j), con
   $$C_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,(j-1)} & a_{1,j} & a_{1,(j+1)} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1),1} & \cdots & a_{(i-1),(j-1)} & a_{(i-1),j} & a_{(i-1),(j+1)} & \cdots & a_{(i-1),n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{(i+1),1} & \cdots & a_{(i+1),(j-1)} & a_{(i+1),j} & a_{(i+1),(j+1)} & \cdots & a_{(i+1),n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,(j-1)} & a_{n,j} & a_{n,(j+1)} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

2. Dadas las matrices:
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Verifique que A y B son semejantes.

   b) Diagonalice A y B y compare sus valores y vectores propios.

3. Diagonalice, si es posible, la matriz
   $$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   considerandola como la representación matricial del operador T sobre:

   a) $\mathbb{R}^3$, como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   b) $\mathbb{C}^3$, como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

4. Probar que los coeficientes del polinomio característico de una involución cumplen que
   $$\alpha_k = \varepsilon\alpha_{n-k}, \text{ con } k = 0, \ldots, n \text{ y } \ \varepsilon = \pm 1$$

2. Ejercicios propuestos 9

1. Sea E un espacio vectorial n-dimensional y φ un operador lineal sobre E.

   Pruebe que la representación matricial de $ad(\varphi)$ esta dada por:

$$[ad(\varphi)]_{n\times n} = [cof(a_{ij})]_{n\times n}$$

2. Dada una transformación lineal invertible $\varphi : E \to E$, donde E es un espacio de dimensión finita. Pruebe que el polinomio característico de φ^{-1} tiene la forma

$$p_{\varphi^{-1}}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \det(\varphi^{-1}) \cdot \det(\varphi - \lambda^{-1}\imath)$$

3. Pruebe que si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ son matrices semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.

4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, con $m \leq n$ los distintos valores propios de A. Sean $v_1, \ldots, v_k$, con $k \leq n$ los vectores propios de A.

   Pruebe que $v_1, \ldots, v_k$ son l.i.

5. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes, para un operador T sobre un espacio vectorial V de dimensión finita con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ y espacios propios $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r} \leq V$:

   i) T es diagonalizable.

   ii) El polinomio característico de T tiene la forma

$$p_T(\lambda) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{d_k} \ ,$$

   donde $dim(V_{\lambda_k}) = d_k, \ k = 1, \ldots, r$.

   iii) $dim(V_{\lambda_1}) + \ldots + dim(V_{\lambda_r}) = dim(V)$.