Ayudantía N°8

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Quiz 5

- Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional, E^* un espacio dual de E y $\Delta \neq 0$ una función determinante en E. Se define la función $\Delta^* : (E^*)^n \to \mathbb{K}$ como sigue:

$$\Delta^*(x_1^*, \dots, x_n^*) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x_1^*, \dots, x_n^* \text{ son l.d.} \\ [\Delta(x_1, \dots, x_n)]^{-1} & \text{, si } x_1^*, \dots, x_n^* \text{ son l.i.} \end{cases},$$

donde $x_1, \dots, x_n \in E$ es la base asociada a la base dual $x_1^*, \dots, x_n^* \in E^*$.

Pruebe que Δ^* es una función determinante.

2. Ayudantía 8

1. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional. Sea $e_1, \dots, e_n$ una base de E y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ escalares fijos. Considerar la transformación lineal $\varphi : E \to E$ tal que:

$$\varphi(e_k) = \lambda_k \cdot e_k,\ k = 1, \dots, n.$$

Probar que $\det(\varphi) = \lambda_1 \dots \lambda_n$.

2. Probar que el determinante de la matriz $[a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = 1 - \delta_i(j)$ es igual a $(n-1)(-1)^{n-1}$.

Sugerencia: Considerar la transformación $\varphi : E \to E$ definida por

$$\varphi(e_k) = \sum_{j=1}^{n} e_j - e_k,\ k = 1, \dots, n.$$

3. ***Definición:*** (*Adjunta*) Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional, Δ una función determinante no idénticamente nula en E y sea $\varphi \in \mathfrak{L}(E, E)$.

Se define la función n-lineal $\Phi : E^n \to \mathfrak{L}(E, E)$ dada por:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \Delta(x, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{j-1}), \varphi(x_{j+1}), \dots, \varphi(x_n)) \cdot x_j$$

   a) Probar que Φ es alternante.

   b) Probar que existe una única transformación lineal, $ad(\varphi)$, en E tal que

$$\Phi(x_1, \dots, x_n)(x) = \Delta(x_1, \dots, x_n)[ad(\varphi)(x)],\ \forall\, x, x_1, \dots, x_n \in E$$

   Ésta transformación lineal es conocida como la *adjunta* de φ.

   c) Probar que Φ no depende de la función determinante Δ elegida.

3. Ejercicios propuestos 8

1. Sea $\alpha : E \to F$ un isomorfismo lineal y $\varphi : E \to E$ una transformación lineal. Probar que

$$\det(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}) = \det(\varphi).$$

2. Probar las siguientes propiedades de la adjunta *(definida en el ejercicio 3)*:

   a) $ad(\psi \circ \varphi) = ad(\varphi) \circ ad(\psi)$

   b) $\det(ad(\varphi)) = (\det(\varphi))^{n-1}$

   c) Si φ tiene rango $r = n-1$, entonces $Im(ad(\varphi)) = Ker(\varphi)$

   d) Si φ tiene rango $r \leq n-2$, entonces $ad(\varphi) = 0$

   e) $ad(ad(\varphi)) = (\det(\varphi))^{n-2} \cdot \varphi$

   f) $\det(ad(ad(\varphi))) = (\det(\varphi))^{(n-2)^2}$

3. Probar que:

   a)

$$\det\left[\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a & x \end{pmatrix}_{n\times n}\right] = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

   b)

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & \dots & (\lambda_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_1)^{n-1} & (\lambda_2)^{n-1} & \dots & (\lambda_n)^{n-1} \end{pmatrix}\right] = \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$$ [1]

4. Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Probar que:

$$\det\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}\right] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\beta_1 \dots \beta_n,$$

donde $\beta_k = \sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_k)^j \alpha_j$ y $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, $k = 1, \dots, n$.

Sugerencia: Multiplicar la matriz $[a_{ij}]$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_n \\ (\varepsilon_1)^2 & \dots & (\varepsilon_n)^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_1)^n & \dots & (\varepsilon_n)^n \end{pmatrix}$$

[1] Este determinante es conocido como el *Determinante de Vandermonde*