Ayudantía N°7

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Ayudantía 7

1. Dada la permutación $\sigma \in S_6$ [1] tal que:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 6 \\ 5 & \longrightarrow & 3 \\ 6 & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

   a) Determine el largo y el signo de σ.

   b) Determine la forma matricial de σ y úsela para determinar $\sigma^3 = \sigma \circ \sigma^2$.

   c) Determine el orden de σ.

2. Determine si las siguientes funciones son multilineales (y también si son alternantes, cuando corresponda):

   a) $T: \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$T(v_1, v_2, v_3) = a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1},$$

   donde $v_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$, $i = 1, 2, 3$.

   b) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\langle z, \omega \rangle = z \cdot \overline{\omega}$$

   donde $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial real.

   c) $[\cdot, \cdot] : \underbrace{M_{n\times n}(\mathbb{K}) \times \ldots \times M_{n\times n}(\mathbb{K})}_{k-veces} \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$[A_1, \ldots, A_k] = \sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdot \ldots A_{\sigma(k)},$$

   donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

   d) $R: \ V_1 \times \mathfrak{L}(V_1, \mathbb{K}) \times \ldots \times V_n \times \mathfrak{L}(V_n, \mathbb{K})$ tal que

$$R(v_1, f_1, v_2, f_2, \ldots, v_n, f_n) = f_1(v_1) \cdot \ldots \cdot f_n(v_n),$$

   donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $V_1, \ldots, V_n$ son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $\mathfrak{L}(W, \mathbb{K})$ es el espacio de las transformaciones lineales de W en $\mathbb{K}$.

3. Sean E y F espacios vectoriales sobre un cuerpo de característica $p \neq 2$ y sea $\Phi : E \to F$ una función k-lineal. Demuestre la equivalencia de las siguientes condiciones:

   i) Para cada permutación $\sigma \in S_k$ se cumple que $\Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = sign(\sigma) \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_k)$.

   ii) $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 0$, si $x_i = x_j$, para algún par x_i, x_j, con $i \neq j$.

   iii) $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 0$, si $x_1, \ldots, x_k$ son linealmente dependientes.

[1] S_k denota el grupo de permutaciones de k elementos con la operación composición

2. Ejercicios propuestos 7

1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Considerar la función asociada a la base $\mathcal{B}$ dada por:

$$\Delta_{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma)\Phi_\sigma^{\mathcal{B}}(w_1, \ldots, w_n),$$

donde

$$\Phi_\sigma^{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{cases} 0 & , \text{si } \sigma = \imath \\ 1 & , \text{si } \sigma \neq \imath \end{cases}$$

   a) Demuestre que $\Delta_{\mathcal{B}}$ es una función determinante tal que $\Delta_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

   b) Dadas las funciones determinantes $\Delta_{\mathcal{B}}$ y $\Delta_{\mathcal{B}'}$ asociadas a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente. Demuestre que existe un escalar λ tal que
   $$\Delta_{\mathcal{B}} = \lambda \Delta_{\mathcal{B}'}$$

   c) Demuestre que si $\Delta \neq 0$ es una función determinante sobre V, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $\Delta = \Delta_{\mathcal{B}}$

2. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial n-dimensional. Considerar el espacio $\mathfrak{L}(E, E)$ de las transformaciones lineales de E en E.

   a) Sea F una función sobre $\mathfrak{L}(E, E)$ tal que $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi)F(\varphi)$ y $F(\imath) = 1$. Probar que F puede ser escrita en la forma
   $$F(\varphi) = f(\det(\varphi)),$$
   donde $\det(\varphi)$ es el determinante de la transformación φ y $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es una función tal que
   $$f(\lambda\mu) = f(\lambda)f(\mu).$$

   b) Suponga que F además cumple que $F(\lambda\imath) = \lambda^n$. Probar que:

      i) Si E es un espacio vectorial real de dimensión impar, entonces se cumple que
      $$F(\varphi) = \det(\varphi) \qquad \text{ó} \qquad F(\varphi) = |\det(\varphi)|.$$

      ii) Si E es un espacio vectorial real de dimensión par o un espacio vectorial complejo, entonces se cumple que
      $$F(\varphi) = \det(\varphi).$$

3. Sea ω una transformación lineal de E tal que $\omega^2 = \imath$. Probar que $\det(\omega) = (-1)^r$, donde r es el rango de la transformación $\omega - \imath$.

4. Sea $\jmath$ una transformación lineal de E tal que $\jmath^2 = -\imath$. Probar que la dimensión de E debe ser impar. Pruebe además que $\det(\jmath) = 1$