# Ayudantía N°6

MAT-210

*Álgebra Lineal*

Ayudante: Nicolás Varela Campos

## 1. Quiz 4

- Sea $E$ un espacio vectorial de dimensión finita. Dada una transformación lineal $\varphi : E \to E$ tal que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ para toda transformación lineal $\psi : E \to E$.

  Demuestre que $\varphi = \lambda\imath$, para algún escalar $\lambda$, donde $\imath$ es la transformación identidad.

  *Sugerencia:* Pruebe que para cada $x \in E$ existe un escalar $\lambda_x$ tal que $\varphi(x) = \lambda_x \imath(x)$ y luego pruebe que $\lambda_x$ no depende de $x$.

## 2. Ayudantía 6

1. Considere $\mathcal{A}$ como el subespacio de todos los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}_2[\![x]\!]$ tales que $p(-x) = \int_0^x tp''(t)dt$.

   *a*) Determine la forma matricial de una transformación lineal $T$ de $\mathbb{R}_2[\![x]\!]$ en $\mathcal{A}$.

   *b*) Determine la forma matricial de un isomorfismo de $\mathbb{R}_2[\![x]\!]/Ker(T)$ en $\mathcal{A}$.

2. Sean $E, F$ y $G$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Sean $\varphi : E \to F$ y $\psi : E \to G$ transformaciones lineales tales que

$$Ker(\varphi) \subset Ker(\psi)$$

   Demuestre que existe $\chi : F \to G$ tal que $\chi \circ \varphi = \psi$.

3. *a*) Demuestre que si $E \leq F \leq G$, entonces se cumple que

$$(G/E)/(F/E) \cong G/F$$

   *b*) Construya un isomorfismo explícito para el caso donde $G = M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$, $F$ es el conjunto de las matrices simétricas y $E$ es el conjunto de las matrices diagonales, todas de dimensión $2 \times 2$.

# 3. Ejercicios propuestos 6

1. ***Definición:*** (*Secuencias exactas, secuencias exactas cortas, secuencias exactas cortas separadas*)

   La secuencia de transformaciones lineales

   $$F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G$$

   es *exacta en* $E$ si $Im(\varphi) = Ker(\psi)$.
   Una secuencia es *exacta* si es exacta en cada espacio vectorial intermedio de la secuencia.

   La secuencia

   $$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 0$$

   es *corta exacta* si es exacta en $F$, $E$ y $G$.

   La secuencia corta exacta

   $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varphi"] & E \arrow[r, bend left, "\psi"] & G \arrow[l, bend left, "\chi"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

   es *separada* si existe una transformación lineal $\chi : G \to E$ tal que $\psi \circ \chi = \imath$.

   *a*) Dada la secuencia exacta

   $$F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\chi} H$$

   Pruebe que $\varphi$ es sobreyectiva si y sólo si $\chi$ es inyectiva.

   *b*) Pruebe que la secuencia corta exacta es separada si y sólo si existe una transformación $\omega : E \to F$ tal que $\omega \circ \varphi = \imath$

2. Demuestre el siguiente lema:

   ***Lema:*** (*Lema del Hexágono*) Dado el diagrama:

   $$\begin{tikzcd}
   & A \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] \arrow[dd, "\varphi"] & \\
   B_1 \arrow[dd, "k_1"', "\cong"] & & B_2 \arrow[dd, "k_2", "\cong"'] \\
   & E \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[dd, "\psi"] & \\
   C_1 \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[dr, "l_1"'] & & C_2 \arrow[ul, "i_2"] \arrow[dl, "l_2"] \\
   & B &
   \end{tikzcd}$$

   en donde todos los triángulos son conmutativos, $k_1$ y $k_2$ son isomorfismos y las diagonales $j_2 \circ i_1$ y $j_1 \circ i_2$ son exatas en $E$.

   Probar que

   $$l_1 \circ k_1 \circ h_1 + l_2 \circ k_2 \circ h_2 = \psi \circ \varphi$$