

Ayudantía N°6

MAT-210
Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Quiz 4

- Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Dada una transformación lineal $\varphi : E \rightarrow E$ tal que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ para toda transformación lineal $\psi : E \rightarrow E$.

Demuestre que $\varphi = \lambda \iota$, para algún escalar λ , donde ι es la transformación identidad.

Sugerencia: Pruebe que para cada $x \in E$ existe un escalar λ_x tal que $\varphi(x) = \lambda_x \iota(x)$ y luego pruebe que λ_x no depende de x .

2. Ayudantía 6

1. Considere \mathcal{A} como el subespacio de todos los polinomios $p(x) \in \mathbb{R}_2[[x]]$ tales que $p(-x) = \int_0^x tp''(t)dt$.

a) Determine la forma matricial de una transformación lineal T de $\mathbb{R}_2[[x]]$ en \mathcal{A} .

b) Determine la forma matricial de un isomorfismo de $\mathbb{R}_2[[x]]/Ker(T)$ en \mathcal{A} .

2. Sean E, F y G \mathbb{K} -espacios vectoriales. Sean $\varphi : E \rightarrow F$ y $\psi : E \rightarrow G$ transformaciones lineales tales que

$$Ker(\varphi) \subset Ker(\psi)$$

Demuestre que existe $\chi : F \rightarrow G$ tal que $\chi \circ \varphi = \psi$.

3. a) Demuestre que si $E \leq F \leq G$, entonces se cumple que

$$(G/E)/(F/E) \cong G/F$$

b) Construya un isomorfismo explícito para el caso donde $G = M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3)$, F es el conjunto de las matrices simétricas y E es el conjunto de las matrices diagonales, todas de dimensión 2×2 .

3. Ejercicios propuestos 6

1. **Definición:** (*Secuencias exactas, secuencias exactas cortas, secuencias exactas cortas separadas*)

La secuencia de transformaciones lineales

$$F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G$$

es *exacta en E* si $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$.

Una secuencia es *exacta* si es exacta en cada espacio vectorial intermedio de la secuencia.

La secuencia

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 0$$

es *corta exacta* si es exacta en F , E y G .

La secuencia corta exacta

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} E \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\chi} \end{array} G \longrightarrow 0$$

es *separada* si existe una transformación lineal $\chi : G \rightarrow E$ tal que $\psi \circ \chi = \iota$.

- a) Dada la secuencia exacta

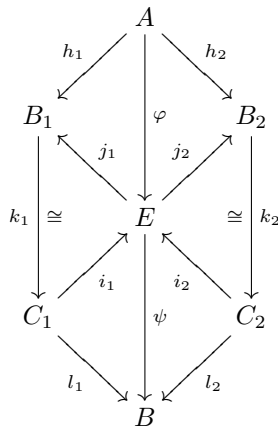
$$F \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\chi} H$$

Pruebe que φ es sobreyectiva si y sólo si χ es inyectiva.

- b) Pruebe que la secuencia corta exacta es separada si y sólo si existe una transformación $\omega : E \rightarrow F$ tal que $\omega \circ \varphi = \iota$

2. Demuestre el siguiente lema:

Lema: (*Lema del Hexágono*) Dado el diagrama:



en donde todos los triángulos son conmutativos, k_1 y k_2 son isomorfismos y las diagonales $j_2 \circ i_1$ y $j_1 \circ i_2$ son exactas en E .

Probar que

$$l_1 \circ k_1 \circ h_1 + l_2 \circ k_2 \circ h_2 = \psi \circ \varphi$$