Ayudantía N°5

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Quiz 3

- Describir explícitamente una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imágen sea el espacio generado por los vectores $(1,0,-1)$ y $(1,2,2)$.

2. Ayudantía 5

1. *a)* Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y T un operador lineal sobre V tal que $T^2=0$. Determine una relación entre el núcleo y la imágen de T.

   b) Encontrar dos operadores lineales T y U sobre $\mathbb{R}^2$ tales que $TU=0$, pero $UT\neq 0$.

   c) Encontrar un operador lineal T sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $T^2=0$, pero $T\neq 0$.

2. Sea T un operador lineal sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ tal que

$$T[(0,0,1)]=(1,0,i) \qquad T[(0,1,0)]=(0,1,1) \qquad T[(0,0,1)]=(i,1,0)$$

   a) Determinar una expresión que describa explícitamente a T.

   b) Determinar si T es invertible.

   c) Determinar la representación matricial de T sobre la base canónica de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

3. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sea U un isomorfismo de V sobre W.
   Demuestre que la aplicación $T\mapsto UTU^{-1}$ es un isomorfismo de $L(V,V)$ sobre $L(W,W)$, donde $L(A,B)$ denota el espacio vectorial de las transformaciones lineales de A sobre B.

4. Considere el operador lineal sobre $\mathbb{R}_3[\![x]\!]$ de la forma

$$p(x)\mapsto T(p(x))=xp'(x)$$

   a) Determine una base para el núcleo y la imágen de T.

   b) Determine la representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}_3[\![x]\!]$. Determine, usando esta representación, si el operador es invertible.

   c) Determine el espacio $\mathbb{R}_3[\![x]\!]/Ker(T)$. Sea $\pi_T:\mathbb{R}_3[\![x]\!]\to\mathbb{R}_3[\![x]\!]/Ker(T)$ la proyección natural de $\mathbb{R}_3[\![x]\!]$ sobre $\mathbb{R}_3[\![x]\!]/Ker(T)$. Determine la representación matricial de π_T y úsela para determinar la represenatción matricial de $\pi_T\circ T$.

3. Ejercicios propuestos 5

1. Encuentre dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la representación matricial de la transformación T, del ejercicio 3 de esta ayudantía, dada por la matriz[1] $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sea una matriz diagonal.
   Luego determine la representación matricial de T^{100}.

2. Sea $\mathcal{H} \leq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices, de coeficientes complejos, que son iguales a su transpuesta conjugada[2] (i.e. $A = \overline{A}^T$).
   Verifique que la transformación
   $$(x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{pmatrix}$$
   es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{H}$.

3. Suponga que $\varphi : V \to W$ es una transformación lineal fija.
   a) Considere el espacio $M^l(\varphi)$ de las transformaciones lineales $\psi : W \to V$ tales que $\psi \circ \varphi = 0$. Pruebe que si φ es sobreyectiva, entonces $M^l(\varphi) = \{0\}$.
   b) Considere el espacio $M^r(\varphi)$ de las transformaciones lineales $\psi : W \to V$ tales que $\varphi \circ \psi = 0$. Pruebe que si φ es inyectiva, entonces $M^r(\varphi) = \{0\}$.
   c) Pruebe que $M^l(\varphi)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales $\psi : W \to V$ tales que $Im(\varphi) \subset Ker(\psi)$.
   Construir un isomorfismo entre $M^l(\varphi)$ y $L(W/Im(\varphi), V)$.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $V_1, V_2 < V$.
   Pruebe que
   $$V_1/ (V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_2$$

[1] i.e. las coordenadas de los vectores de entrada están en la base $\mathcal{B}$ y su transformación está en las coordenadas de la base $\mathcal{B}'$
[2] Éste conjunto es conocido como el conjunto de las *matrices Hermitianas*.