Ayudantía N°4

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Ayudantía 4

1. Considerar el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$. Se define la transformación $T : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(x+iy) = \begin{pmatrix} x+7y & 5y \\ -20y & x-7y \end{pmatrix}$$

   a) Verifique que T es lineal e inyectiva.

   b) Verifique que se cumple la igualdad $T(z_1 \cdot z_2) = T(z_1) \cdot T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   c) Determine el conjunto $Im(T)$ y una base para éste.

2. *a*) ¿Existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,-1,1) = (1,0)$ y $T(1,1,1) = (0,1)$?

   b) Sean

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = (1,-1) & \beta_1 = (1,0) \\ \alpha_2 = (2,-1) & \beta_2 = (0,1) \\ \alpha_3 = (-3,2) & \beta_3 = (1,1) \end{array}$$

   ¿Existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$, para $i = 1,2,3$?

3. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Se define el *conmutador de segundo orden* sobre $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ como la función

$$[\cdot,\cdot] : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \times M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ tal que } [A,B] = AB - BA$$

   Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matriz no nula fija. Se define la transformación $T_B(A) = [A,B]$.

   a) Demuestre que ésta es una transformación es lineal. Determine la dimensión del núcleo y de la imagen de T_B cuando B es una matriz diagonal.

   b) Determine el núcleo y la imágen de T_B, para $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $n = 2$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Se define la relación $A \equiv B \Leftrightarrow [A,B] = 0$. ¿Es ésta una relación de equivalencia?

   d) Se dice que una transformación T es *nilpotente de grado k* si $T^k = T \circ T^{k-1} \equiv 0$.
   Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ y $n = 2$. Determine todas las matrices $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tales que la transformación T_B es nilpotente de grado 2.

   e) Se dice que una transformación es *involutiva* si $T^2 = T \circ T$, es la transformación identidad. Determine para el caso anterior todas las matrices B tales que T_B es involutiva.

2. Ejercicios propuestos 4

1. Sea $M > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $V = \{f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \mid f \text{ es integrable en } [0, +\infty),\ |f(x)| \leq Me^{\alpha x}\}$.

   a) Pruebe que V es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.

   b) Sea además $\mathcal{F}(\alpha, +\infty)$ el espacio de las funciones definidas en el intervalo $(\alpha, +\infty)$. Se define la *transformada de Laplace* como la transformación:

   $$\mathcal{L} : V \to \mathcal{F}(\alpha, +\infty) \text{ tal que } \mathcal{L}[f(x)](\mu) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\mu x}dx$$

   Verifique que $\mathcal{L}$ es lineal.

   c) Analizar la tranformada de Laplace (i.e. determinar núcleo, imagen y sus respectivas dimensiones, además de la inyectividad y sobreyectividad) restricta a los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 3, es decir, $\mathbb{R}_3[x] \hookrightarrow V$ [1].

2. Considerar el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}^0([a, b])$ de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.
   Demuestre que para el operador diferencial de orden r definido por:

   $$D : \mathcal{C}^r([a, b]) \to \mathcal{C}^0([a, b]) \text{ tal que } D(y) = \sum_{k=0}^{r} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k}(x)$$

   donde $a_0, a_1, ..., a_r \in \mathcal{C}^0([a, b])$, se cumple que la dimensión de su núcleo es r.

[1] i.e. $\mathbb{R}_3[x]$ considerado como subespacio vectorial de V, donde $\hookrightarrow$ denota una operación inyectiva de $\mathbb{R}_3[x]$ en V llamada *incrustación* o *embebimiento*