Ayudantía N°3

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Quiz 2

1. Consdere el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de las funciones continuas que van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

   - Pruebe que el conjunto de las funciones impares $I := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)\}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   Se define también el subespacio de las funciones pares $P := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x)\} \leq \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

   - Pruebe que $\mathcal{C}(\mathbb{R}) := I \bigoplus P$.

     Sugerencia: Considerar las funciones $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ y $\dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ para una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ dada.

2. Ayudantía 3

1. Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ y los vectores $u_1 = (1, 0, i)$ y $u_2 = (1 + i, 1, -1)$.

   a) Muestre que el conjunto $\{u_1, u_2\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

   b) Muestre que $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (1, i, 1 + i)$ pertenecen al espacio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$.

   c) Muestre que el conjunto $\{w_1, w_2\}$ es una base para U. Determine las coordenadas de u_1 y u_2 en esta base.

2. Considere el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

   $$\mathbb{C}_3[x] := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$

   Determine una base para el espacio generado por el conjunto $\{ix^2 - 2,\ -ix^3 - (1 - i)x,\ x^2 - 2x,\ x^3 - 4i\}$.

3. Pruebe que si los vectores $v_1, v_2, ..., v_m$ son l.i., entonces también lo son los vectores $v_1, v_2 - v_1, ..., v_m - v_1$. ¿Es válido el recíproco?

4. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base del espacio vectorial E. Pruebe que si los números $a_1, a_2, ..., a_n$ no son todos nulos, entonces el conjunto F de los vectores $v = x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$ tales que $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ es un subespacio vectorial de E, con dimensión $dim(F) = n - 1$.

3. Ejercicios propuestos 3

1. Pruebe que la unión de dos subespacios vectoriales (de un mismo espacio vectorial) es subespacio vectorial si y sólo si uno está contenido dentro del otro.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $W \leq V$. Se define la siguiente relación:

$$v_1 \equiv v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

   a) Verifique que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

   Sea $[v]$ la clase de equivalencia de v, V/W el conjunto de las clases de equivalencia y

$$\pi : V \to V/W, \text{ tal que } \pi(v) = [v]$$

   la proyección natural.

   b) Verifique que las siguientes propiedades estan bien definidas (i.e. no dependen del representante de la clase de equivalencia):

      (1) $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$
      (2) $[\lambda v] = \lambda[v]$

   c) Pruebe que el conjunto V/W junto con las operaciones definidas anteriormente resulta un espacio vectorial, denominado *espacio cuociente* de V respecto W.

      Note que valen las propiedades:

      (3) $\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) + \pi(v_2)$
      (4) $\pi(\lambda v_1) = \lambda\pi(v_1)$

   e) Sea $V = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $W = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : Tr(A) = 0\}$. Determine una base para V/W.