Ayudantía N°2

MAT-210

Álgebra Lineal

Ayudante: Nicolás Varela Campos

1. Quiz 1

1. Probar que si dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas tienen las mismas soluciones, entonces son equivalentes.

2. Ayudantía 2

1. Probar que si $R, R' \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ son matrices escalón fila-reducida tales que los sistemas $RX = 0$ y $R'X = 0$ tienen las mismas soluciones, entonces se tiene que $R = R'$.

2. Sea $C = [C_{ij}]_{2\times 2}$. Probar que:

$$\exists A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : C = AB - BA \Leftrightarrow C_{11} + C_{22} = 0$$

3. Suponer que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, con $n < m$. Probar que $C := AB$ no es invertible.

4. Sea $V = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ tal que } f(-t) = \overline{f(t)},\ \forall t \in \mathbb{R} \Big\}$.
   Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad ; \quad (cf)(t) = cf(t)$$

5. Considere los conjuntos:

$$\mathcal{S} := \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^T \}$$
$$\mathcal{A} := \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T \}$$
$$\mathcal{T}_0 := \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \right\}$$
$$\mathcal{T}_u := \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0,\ \text{si } j < i,\ i = 1, ..., n \}$$
$$\mathcal{T}_d := \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0,\ \text{si } i < j,\ i = 1, ..., n \}$$

   a) Pruebe que todos los conjuntos definidos anteriormente son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   b) Verifique que $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{T}_0$ y que $\{0\} \subsetneqq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_0$.

   c) Demuestre que $\{0\} = \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \mathcal{T}_d = \mathcal{A} \cap \mathcal{T}_u$.

   d) Determine el espacio $\mathcal{D} := \mathcal{T}_u \cap \mathcal{T}_d$. Verifique que $\mathcal{D} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_d$.

   e) Demuestre que $\{0\} \subsetneqq (\mathcal{T}_u \cap \mathcal{T}_d) + \mathcal{A} \subsetneqq (\mathcal{T}_u + \mathcal{A}) \cap (\mathcal{T}_d + \mathcal{A}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   f) Pruebe además que $\{0\} = (\mathcal{T}_u \cap \mathcal{A}) + (\mathcal{T}_d \cap \mathcal{A}) \subsetneqq \mathcal{A} \cap (\mathcal{T}_u + \mathcal{T}_d) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$

   g) Finalmente, pruebe que $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{T}_0 = (\mathcal{T}_u \cap \mathcal{T}_d) + \mathcal{T}_0$

3. Ejercicios propuestos 2

1. Sean $W_1, W_2 \leq W$ tales que $W = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0_W\}$. Pruebe que para cada vector $\alpha \in W$ existe una única combinación $\alpha_1 \in W_1$, $\alpha_2 \in W_2$ tal que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
   Esta suma de subespacios vectoriales se conoce como *suma directa* y se denota por $W = W_1 \bigoplus W_2$.

2. Considere el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demuestre que el conjunto

$$L^2([a,b]) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ tal que } \int_a^b (f(x))^2 \, dx < +\infty \right\},$$

   con las operaciones usuales de suma y ponderación de funciones, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Sea W el conjunto de todos los $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ que satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & -x_4 & & = 0 \\ x_1 & & +\frac{2}{3}x_3 & & -x_5 & = 0 \\ 9x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -3x_4 & -3x_5 & = 0 \end{cases}$$

   Encuentre un conjunto generador finito de W.