Ejercicios sobre realimentación óptima del estado

Eduardo I. Silva*

25 de noviembre de 2010

Problema

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + d(k), \quad x(0) = x_o, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

donde x es el estado, x_o es el estado inicial, u es la señal de control, y d es una señal exógena no manipulable (una perturbación). Suponga que x, u y d poseen dimensiones arbitrarias y compatibles, y que las matrices A y B_u son reales de dimensiones apropiadas. Considere, además, la ley de control

$$u(k) = Kx(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$

donde K es una matriz real de dimensiones apropiadas. Defina $\mathcal{S} \triangleq \{K : A + B_u K$ posee radio espectral menor a la unidad$\}$.

Suponga que x_o es una variable aleatoria de segundo orden, no correlacionada con d, y que d es una secuencia de ruido blanco de segundo orden, media cero y varianza constante para todo instante.

1. **(Problema de regulador cuadrático estacionario)** Proponga un problema de optimización convexa (que incorpore restricciones escritas en términos de desigualdades matriciales lineales) cuya solución permita hallar

$$J_{\text{opt}} \triangleq \inf_{K \in \mathcal{S}} \lim_{k \to \infty} \mathcal{E}\left\{ x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) \right\}, \tag{3}$$

   donde Q y R son matrices de ponderación reales de dimensiones apropiadas, $Q > 0$ y $R > 0$.

2. **(Problema de optimización con restricciones)** Suponga que se definen dos señales y_1 e y_2 a través de las relaciones

$$y_1(k) = C_1 x(k) + e_1, \tag{4}$$
$$y_2(k) = C_2 x(k) + e_2, \tag{5}$$

   donde C_1 y C_2 son matrices reales de dimensiones apropiadas y de rango completo por filas, y e_1 y e_2 son dos secuencias de ruido blanco de segundo orden, media cero y varianza constante para todo instante, no correlacionadas entre sí y no correlacionadas con (x_o, d).

*Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110-V, Valparaíso, Chile. Email: eduardo.silva@usm.cl

Proponga un problema de optimización convexa (que incorpore restricciones escritas en términos de desigualdades matriciales lineales) cuya solución permita hallar[1]

$$J_M \triangleq \inf_{\substack{K\in\mathcal{S} \\ \mathrm{trace}\left\{P_{y_2}\right\}\leq M}} \mathrm{trace}\left\{P_{y_1}\right\}, \tag{6}$$

donde P_{y_i} corresponde a la matriz de varianza estacionaria de y_i, y M es un escalar real tal que

$$\inf_{K\in\mathcal{S}} \mathrm{trace}\left\{P_{y_2}\right\} < M. \tag{7}$$

3. **(Problema elemental de control sobre redes de comunicación)** Suponga que la ley de control definida en (2) se reemplaza por la ley de control ruidosa

$$u(k) = q(k) + v(k), \quad v(k) = Kx(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

donde q es ruido blanco de segundo orden, no correlacionado con (x_o, d), de media cero y cuya varianza P_q (constante para todo instante) ha de elegirse sujeta a la restricción

$$P_v \leq \Gamma P_q, \tag{9}$$

donde $\Gamma > 0$ es un escalar real arbitrario, y P_v es la matriz de varianza estacionaria de v.

Proponga un problema de optimización convexa (que incorpore restricciones escritas en términos de desigualdades matriciales lineales) cuya solución permita hallar

$$J_\Gamma \triangleq \inf_{\substack{K\in\mathcal{S}, P_q\geq 0 \\ P_v\leq\Gamma P_q}} \mathrm{trace}\left\{P_x\right\}, \tag{10}$$

donde P_x corresponde a la matriz de varianza estacionaria del estado x.

[1] trace $\{X\}$ denota a la traza de la matriz X.