Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2010

E. Cerpa

Aplicaciones de la Matemática en Ingeniería
Tarea #2

Ejercicio 1 : **(Sistema hidráulico)** La Figura 1 representa una instalación compuesta de 4 cubetas idénticas colocadas en "cascada". El objetivo es conservar un flujo de salida constante, así que buscamos mantener los niveles de agua en cada cubeta en los valores fijos $h_1^e, h_2^e, h_3^e, h_4^e$. Los dos controles son los flujos de alimentación, controlados por válvulas, de la primera y tercera cubeta: q_1 y q_2.

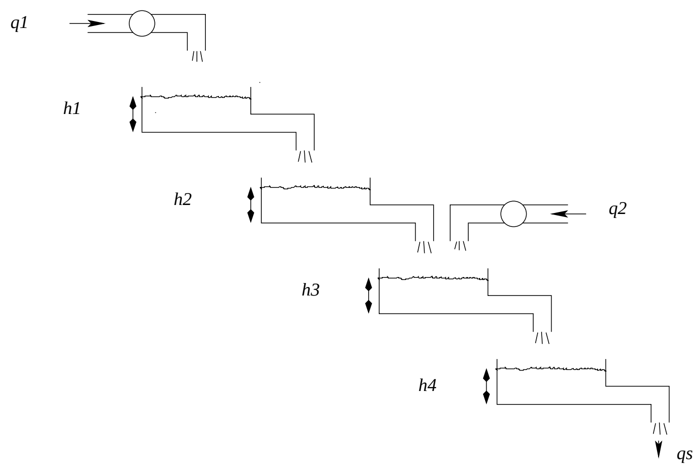

Figura 1: Esquema del sistema.

1. Dar las ecuaciones de estado del sistema, suponiendo que el flujo que sale de la cubeta número i es proporcional al nivel h_i. Denotamos k la constante de proporcionalidad entre el flujo y el nivel, y S el área de la sección superficial de cada cubeta. Denotemos también $a = \frac{k}{S} = 1\,\mathrm{mn}^{-1}, b = \frac{1}{S} = 1\,\mathrm{m}^{-2}$.

2. Encontrar los puntos de equilibrio del sistema. Denotar (X_e, q_{1e}, q_{2e}) el punto de equilibrio más interesante desde el punto de vista físico.

3. Examinar la estabilidad del sistema para $q_1 = q_2 = 0$. ¿El sistema controlado es estabilizable?

4. Si el *feedback* $(q_1, q_2) = KX$ hace que el sistema converja hacia el origen, ¿cuál es el feedback que hace converger la solución hacia $((X_e, q_{1e}, q_{2e}))$?

5. Note que el sistema está compuesto por dos sub-sistemas acoplados. Proponga un feedback que no haga intervenir nuevos acoplamientos entre los dos sub-sistemas, para acelerar la dinámica del sistema. Calcular el feedback necesario para doblar el valor de los polos del sistema sin modificar su estructura.

Ejercicio 2 : Consideremos un mezclador al cuál llega un mismo producto por dos entradas diferentes, con las concentraciones respectivas c_1 y c_2 (constantes), y con flujos $u_1(t)$ y $u_2(t)$. El volumen en el mezclador es notado $V(t)$ y la concentración del producto $c(t)$. El flujo de salida es $d(t) = \gamma\sqrt{V(t)}$, donde γ es una constante. Los controles son $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

1. Mediante un balance volumen-masa, establecer que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = u_1(t) + u_2(t) - d(t), \\ \frac{d}{dt}(c(t)V(t)) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) - c(t)d(t), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = u_1(t) + u_2(t) - \gamma\sqrt{V(t)}, \\ \dot{c}(t) = \dfrac{1}{V(t)}\big[(c_1 - c(t))u_1(t) + (c_2 - c(t))u_2(t)\big]. \end{cases}$$

El objetivo es estabilizar el sistema a flujos constantes en la entrada y salida, a una concentración constante y un volumen constante. Es decir, queremos que cuando $t \to \infty$,

$$u_1(t) \to u_1^0, \quad u_2(t) \to u_2^0, \quad d(t) \to d^0, \quad c(t) \to c^0, \quad V(t) \to V^0.$$

2. (a) Mostrar que

$$\begin{cases} u_1^0 + u_2^0 = d^0 = \gamma\sqrt{V^0}, \\ c_1u_1^0 + c_2u_2^0 = c^0d^0 = \gamma c^0\sqrt{V^0}. \end{cases}$$

   (b) Mostrar que el sistema linealizado en el punto de equilibrio (V^0, c^0, u_1^0, u_2^0), que está dado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

   con $\alpha = -\dfrac{\gamma}{2\sqrt{V^0}}$, $\beta_1 = \dfrac{c_1 - c^0}{V^0}$ y $\beta_2 = \dfrac{c_2 - c^0}{V^0}$, es controlable.

   (c) Denotemos $X = (V, c)^t$. Enunciar y demostrar una condición suficiente sobre

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

   para que el sistema con el feedback $u = KX$ sea asintóticamente estable en forma local en este punto de equilibrio.

   (d) Construir un feedback que coloque los valores propios en -1.

Ejercicio 3 : El sistema estudiado, representado en la Figura 2, está compuesto de dos partes: el chasis y el péndulo. El péndulo se desplaza verticalmente con respecto al chasis. Fijado al chasis, un electroimán ejerce sobre el péndulo una fuerza vertical hacia arriba, lo que compensa el efecto de la gravedad. El objetivo es mantener el péndulo en suspensión.

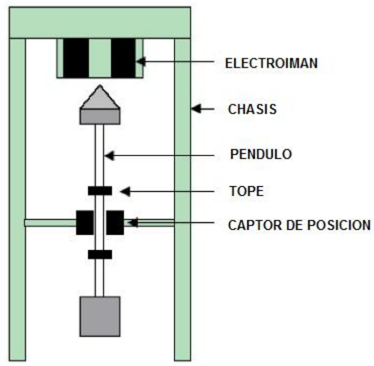

Figura 2: Esquema del sistema físico.

El esquema del principio de suspensión está descrito en la Figura 3. La ecuación de movimiento del péndulo nos da

$$m\ddot{h} = mg + F(h, i)$$

donde m es la masa el péndulo y F es la fuerza electromagnética ejercida sobre el péndulo. Esta fuerza depende de la corriente que pasa por la bobina y de la distancia del péndulo a ésta. La inductancia depende de la posición del péndulo por una relación de la forma:

$$L(h) = L_0 + \frac{L_1}{1 + \frac{h}{a}}$$

La inductancia es maximal cuando el pédulo está en contacto con la bobina y tiende hacia L_0 cuando este se aleja.

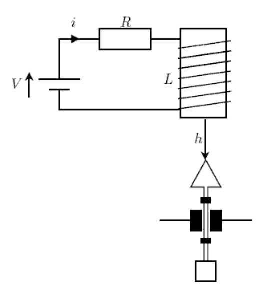

Figura 3: Modelo de la maqueta de suspensión magnética

La energía electromagneética guardada en la bobina está dada por $E(h, i) = \frac{1}{2}L(h)i^2$ y la fuerza: $F(h, i) = \frac{-L_1 i^2}{2a\left(1+\frac{h}{a}\right)^2}$. La ecuación mecánica es entonces: $m\ddot{h} = mg + \frac{-L_1 i^2}{2a\left(1+\frac{h}{a}\right)^2}$. Además, el circuito de alimentación de la bobina puede ser modelada por:

$$\frac{di}{dt} = \beta V - \gamma i$$

donde β y γ son contantes estrictamente positivas.

1. Denotando $x_1 = h$, $x_2 = \dot{h}$, $x_3 = i$ y $u = V$, mostrar que las ecuaciones precedentes dan el sistema de control:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & g - \dfrac{L_1 a x_3^2}{2m(a+x_1)^2}, \\ \dot{x}_3 & = & -\gamma x_3 + \beta u. \end{array}\right. \tag{1}$$

2. Mostrar que si (x^{eq}, u^{eq}) es un punto de equilibrio del sistema (1), entonces tenemos que:

$$x_2^{eq} = 0, \qquad x_3^{eq} = \sqrt{\frac{2mg}{L_1 a}}(a + x_1^{eq}), \qquad u^{eq} = \frac{\gamma}{\beta} x_3^{eq}.$$

3. Mostrar que el sistema (1) es localmente controlable en torno al punto de equilibrio (x^{eq}, u^{eq}).

4. El sistema (1) sin control ($u = 0$), ¿es estable en torno a (x^{eq}, u^{eq})?

5. El sistema (1), ¿es localmente estabilizable en torno a (x^{eq}, u^{eq})? Si la respuesta es sí, encontrar una ley de feedback $u = Kx$, con $K = (k_1, k_2, k_3)$, tal que los valores propios del sistema controlado sean $\{-3, -3, -3\}$. ¿Cuál es el feedback que estabiliza el sistema (1) hacia el punto de equilibrio (x^{eq}, u^{eq})?

Ejercicio 4 : Considerar el sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sin(x(t) + y(t)), \\ \dot{y}(t) = e^{x(t)} - 1. \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Encontrar todos los puntos de equilibrio de (2).

2. Determinar la estabilidad de cada uno de los puntos de equilibrio.

3. Ahora, considere el sistema anterior con un control $v(t)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sin(x(t) + y(t)), \\ \dot{y}(t) = e^{x(t)} - 1 + v(t). \end{array}\right. \tag{3}$$

   ¿El sistema (3) es localmente controlable en torno al origen? ¿El punto $(0, 0)$ es asintóticamente estabilizable de manera local?

4. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre $K = (k_1, k_2)$ para que el sistema (3) con el feedback $v = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sea asintóticamente estable en $(0, 0)$.

5. ¿Es posible estabilizar el sistema (3) en $(0, 0)$ con $k_1 = 0$ ó $k_2 = 0$?

6. Construir un feedback que coloque un valor propio en -1 y el otro en -2.