Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Matemática

Semestre II, 2010

E. Cerpa

Aplicaciones de la Matemática en Ingeniería
Tarea #1

Ejercicio 1 : Mostrar la controlabilidad del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 : ¿Para qué valores de α el sistema siguiente es controlable?

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 - \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 : (Sistema de resortes acoplados.) Testear la controlabilidad del sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k_1 x + k_2(y - x), \\ \ddot{y} = -k_2(y - x) + u. \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Mostrar que el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, con

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}, \text{ y } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es controlable en cualquier tiempo.

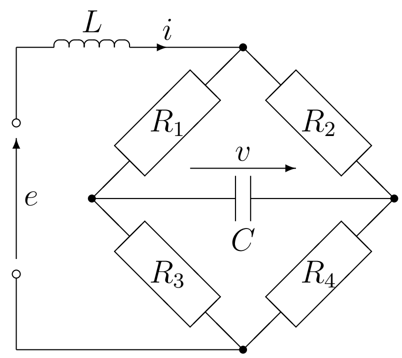
Ejercicio 5 : Sean m y n dos enteros naturales no nulos, y sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Supongamos que el sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ es controlable. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞. Definamos, para todo $t > 0$,

$$A(t) := A + f(t)I,$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

Mostrar que el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t)$ es controlable en cualquier tiempo.

Ejercicio 6 : (Puente de Wheatstone.) Para el circuito siguiente:



se puede mostrar (hágalo!!!) que:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}v = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}i$$
$$L\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)i + \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}v = e$$

1. Obtener una representación de estado ($\dot{x} = Ax + Bu$) tomando como control $u = e$, y como variables de estado $x_1 = i$ y $x_2 = v$.

2. Estudiar la controlabilidad de este sistema. Interpretar el resultado.

Ejercicio 7 : Un carro de masa M se traslada sobre un riel, bajo la acción de una fuerza $u(t)$. Una barra de masa m y de largo ℓ, que puede girar sobre uno de sus extremos, está fija sobre el carro (ver Figura 1).

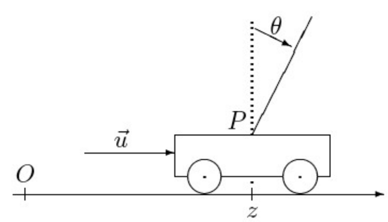


Figura 1: Péndulo sobre un carro

Las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{z} + m\ell\ddot{\theta}\cos(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2\sin(\theta) = u(t), \\ m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\ddot{z}\cos(\theta) - mg\ell\sin(\theta) = 0. \end{cases}$$

1. Encontrar la representación de estado de este sistema:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

2. Encontrar los puntos de equilibrio para $u = 0$.

3. Linealizar el sistema en torno a esos puntos y decir si es controlable.

Ejercicio 8 : Considere un sistema mecánico plano formado por un riel (representado por un segmento) y por un carro de masa m, que se desplaza sin roce sobre el riel que gira en torno del punto O. Sea θ el ángulo entre el eje horizontal y el riel y x la distancia entre O y el carro. Sea J el momento de inercia del riel con respecto a O, y g la aceleración de gravedad. El control es la fuerza u que se ejerce sobre el riel (ver Figura 2).

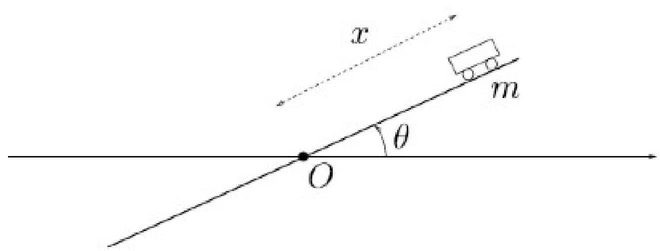


Figura 2: Carro sobre riel móvil.

Las ecuaciones del sistema mecánico son

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = x(t)\dot{\theta}(t)^2 - g\sin\theta(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \dfrac{1}{J + mx(t)^2}\Big(u(t) - 2mx(t)\dot{x}(t)\dot{\theta}(t) - mgx(t)\cos\theta(t)\Big). \end{cases}$$

1. Notando $y = \dot{x}$, $\dot{\theta} = \omega$, y $X = (x, y, \theta, \omega)$, escribir el sistema en la forma $\dot{X}(t) = f(X(t), u(t))$.

2. Determinar los puntos de equilibrio (X_e, u_e) del sistema controlado.

3. Mostrar que el sistema es localmente controlable en torno al punto de equilibrio

$$(X_e, u_e) = (0, 0).$$

Ejercicio 9 : Sean a_1, a_2, a_3 tres constantes estrictamente positivas distintas entre si. Consideremos el sistema siguiente

$$\begin{aligned} a_1\dot{\omega}_1 &= (a_2 - a_3)\omega_2\omega_3 + u_1 \\ a_2\dot{\omega}_2 &= (a_3 - a_1)\omega_1\omega_3 + u_2 \\ a_3\dot{\omega}_3 &= (a_1 - a_2)\omega_1\omega_1 \end{aligned}$$

donde los controles son u_1, u_2.

1. ¿El sistema linealizado en torno a cero es controlable?

2. Denotando $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, escriba el sistema en la forma $\dot{\omega} = f_0(\omega) + u_1 f_1(\omega) + u_2 f_2(\omega)$. Calcule los Corchetes de Lie $[f_1, f_0]$, $[f_2, f_0]$, $[f_1, [f_1, f_0]]$ y $[f_2, [f_1, f_0]]$.

3. ¿Cuál es el espacio generado por $f_1(\vec{0}), f_2(\vec{0}), [f_2, [f_1, f_0]](\vec{0})$?
4. Calcule el espacio generado por los Corchetes iterados en $\omega = \vec{0}$.

Ejercicio 10 : Sea (S_1) el siguiente sistema de control

$$\dot{x}_1 = u_1 \cos(x_3),\ \dot{x}_2 = u_1 \sin(x_3),\ \dot{x}_3 = u_2,$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es el estado y $u = (u_1, u_2)$ es el control.

1. Demuestre que el sistema linealizado en torno al origen no es controlable.
2. Usando los Corchetes de Lie, pruebe que el sistema no lineal (S_1) sí es localmente controlable en torno al origen.
3. Usando el Método de Retorno, pruebe que el sistema no lineal (S_1) sí es localmente controlable en torno al origen.

Ejercicio 11 : Sea (S_2) el siguiente sistema de control

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es el estado y $u = (u_1, u_2)$ es el control.

1. Demuestre que el sistema linealizado en torno al origen no es controlable.
2. Usando el Método de Retorno, pruebe que el sistema no lineal (S_2) sí es localmente controlable en torno al origen.

Ejercicio 12 : Consideremos el sistema de control (S_3)

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 + u,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -x_3 + 2x_1x_2,$$

donde el estado está dado por $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y el control es u.

1. Escriba el sistema en la forma $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u)$.
2. Encuentre $\vec{x}_e$ tal que $f(\vec{x}_e, 0) = 0$.
3. Linealice el sistema en torno a $(\vec{x}_e, 0)$.
4. ¿Es controlable este sistema linealizado?
5. Volviendo al sistema no lineal (S_3), pruebe que toda solución $\vec{x}(t)$ con condición inicial $\vec{x}(0) = 0$, satisface
$$x_3(t) = \int_0^t x_1^2(s) \cos(t - s)\, ds$$
y
$$x_4(t) = x_1^2(t) - \int_0^t x_1^2(s) \sin(t - s)\, ds.$$
6. Demuestre que el sistema (S_3) no es controlable en tiempo T si $T \leq \pi$.