

# Introducción a la Teoría de Control\*

Eduardo Cerpa\*\*

## Resumen

En este curso daremos una pequeña introducción a la Teoría Matemática del Control. Nos concentraremos en tres de sus principales tópicos: la controlabilidad, la estabilización, y el control optimal. Para introducir las ideas principales de cada uno de estos tres temas, consideraremos ejemplos de sistemas de control descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Controlabilidad</b>	<b>2</b>
2.1. Ejemplo del automóvil . . . . .	3
2.2. Corchetes de Lie . . . . .	4
<b>3. Estabilización</b>	<b>8</b>
3.1. Ejemplo del péndulo . . . . .	8
3.2. Primer Intento (lazo abierto) . . . . .	9
3.3. Segundo intento (lazo cerrado parcial) . . . . .	9
3.4. Tercer intento (lazo cerrado) . . . . .	11
<b>4. Control Optimal</b>	<b>12</b>
4.1. Tiempo Optimal . . . . .	12
4.2. Ejemplo del carro a dos motores . . . . .	13

## 1. Introducción

Un sistema de control es un sistema dinámico sobre el cual se puede actuar mediante la elección de alguno de sus elementos. Este elemento que está a nuestra disposición recibirá el nombre de control. A parte del mencionado control, que también recibe el nombre de *entrada*, tenemos una variable de estado que describe el comportamiento del sistema. La finalidad de introducir este control es de influenciar el comportamiento del sistema en cuestión, con el fin de alcanzar ciertos objetivos. En muchas aplicaciones también hay que considerar un tercer elemento que es la observación o

---

\*Notas para el curso de 3 horas de la XXXVI Semana de la Matemática, a realizarse en el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso los días 7, 8 y 9 de octubre 2009.

\*\*Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avda. España 1680, Valparaíso, Chile (eduardo.cerpa@usm.cl).

*salida* del sistema. Esta es una parte de la variable de estado que es la que se puede observar y utilizar para calcular el control.

La Teoría de Control analiza las propiedades de este tipo de sistemas. Por ejemplo, la pregunta básica que podemos estudiar es la factibilidad de llevar un sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo dado. Además, podemos considerar ciertos criterios o restricciones para la función de control o el estado. El objetivo del control puede ser también de volver estable un punto de equilibrio que es inestable en la ausencia del control y así hacerlo insensible a ciertas perturbaciones. Una vez que sabemos que un sistema puede ser llevado de un estado inicial a otro final, podemos buscar trayectorias que sean óptimas bajo ciertos criterios de optimización. Típicamente, se trata de minimizar una función costo o equivalentemente maximizar una función beneficio. Dependiendo del criterio a minimizar, las trayectorias óptimas pueden ser muy distintas. Para convencerse de esto, basta pensar en las diferentes formas en que conduciremos un vehículo dependiendo si queremos minimizar ya sea el tiempo empleado o el combustible consumido.

Para describir el sistema dinámico sobre el que actúa el control, se pueden utilizar, dependiendo del problema, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones integrales, ecuaciones en derivadas parciales, sistemas discretos, ecuaciones de diferencias, etc. Esta variedad de elementos matemáticos presentes, ubica a la Teoría de Control en la interface de diferentes áreas de la matemática, siendo muy diferentes las técnicas y métodos utilizados en cada rama.

La Teoría de Control surge de necesidades prácticas ligadas a solucionar distintos problemas reales. Por esto, es una rama muy ligada a aplicaciones en diferentes áreas de la ingeniería como la robótica, la aeronáutica, la electrónica y más generalmente donde la automatización de procesos sea necesaria. Además, está muy presente en otras áreas como la biología o la economía.

Para describir tres de los principales temas tratados en la Teoría Matemática del Control, consideraremos sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Para un tiempo  $t$ , el estado de nuestro sistema de control lo denotaremos por  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y el control por  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  con  $n, m \in \mathbb{N}$ . Tenemos un estado compuesto por  $n$  componentes y un control de  $m$  componentes. La dependencia entre  $u$  y  $x$  la describiremos de la siguiente manera

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

donde  $f$  es una función suficientemente regular para que existan soluciones. Si resolvemos (1) con la condición inicial  $x(0) = x_0$ , diremos que  $t \mapsto x(t)$  es la trayectoria asociada al control  $u = u(t)$  que parte del estado  $x_0$ .

En estas notas, veremos mediante ejemplos tres de los principales conceptos de la Teoría Matemática del Control. La sección 2 se concentrará en la *Controlabilidad*. Luego, en la sección 3 hablaremos de la *Estabilización*. La sección 4 busca dar una introducción al *Control Optimal*.

Al final de estas notas damos algunas referencias para los interesados en desarrollar los temas mencionados en este curso y en general la Teoría Matemática del Control.

## 2. Controlabilidad

Consideremos el sistema de control (1), en donde tenemos un control  $u$  y una trayectoria  $x$ . La primera pregunta que uno puede hacerse, es si es capaz de elegir el control  $u$  de tal forma que la solución  $x$  satisfaga  $x(0) = x_0$ , y  $x(T) = x_1$ , donde  $x_0, x_1$  son dos estados cualesquiera y  $T$  un tiempo fijo. En otras palabras, ¿soy capaz de llevar el sistema de control desde el estado inicial  $x_0$

al estado final  $x_1$  en un tiempo dado  $T$ ? Si la respuesta es sí para cualquier par de estados  $x_0, x_1$ , decimos que el sistema es controlable.

## 2.1. Ejemplo del automóvil

Consideremos un modelo simplificado para el movimiento de un automóvil. Diremos que nuestro sistema queda descrito mediante cuatro datos  $(x_1, x_2, \varphi, \theta)$  donde  $(x_1, x_2)$  es la posición del centro del eje delantero del auto;  $\varphi$  es el ángulo entre el eje  $x_1$  y el auto; y  $\theta$  es el ángulo entre las ruedas delanteras y el auto. Ver Figura 1.

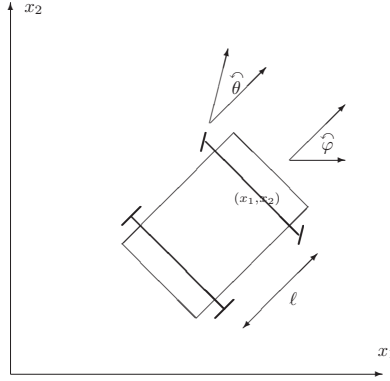


Figura 1: Modelo simplificado de un automóvil.

Como queremos modelar un automóvil y su forma de conducirlo, contaremos con dos controles  $u_1$  y  $u_2$  que son la velocidad con que se gira el manubrio y la velocidad de desplazamiento del automóvil, respectivamente.

Busquemos una descripción en términos de una ecuación diferencial ordinaria, como en (1), para este modelo. Como las ruedas delanteras son paralelas al vector  $(\cos(\varphi + \theta), \sin(\varphi + \theta))$ , tenemos que el centro del eje delantero  $(x_1, x_2)$  se mueve siguiendo la orientación de este vector. La velocidad de este movimiento vendrá dada por el control  $u_2$ . Así, podemos escribir

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \end{pmatrix}.$$

El desplazamiento del centro del eje trasero,  $(x_1 - l \cos(\theta), x_2 - l \sin(\theta))$ , debe ser paralelo al vector  $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ . De esta forma, tenemos la condición

$$(3) \quad \sin(\varphi) \frac{d}{dt} (x_1 - l \cos(\theta)) - \cos(\varphi) \frac{d}{dt} (x_2 - l \sin(\theta)) = 0.$$

Si reemplazamos (2) en (3) y usamos la identidad

$$\sin(\theta) = \sin(\varphi) \cos(\theta + \varphi) - \cos(\varphi) \sin(\theta + \varphi),$$

obtenemos

$$(4) \quad l\dot{\varphi} - u_2 \sin(\theta) = 0.$$

Además, de la definición del control  $u_1$ , tenemos que

$$(5) \quad \dot{\theta} = u_1.$$

Por comodidad, asumiremos de ahora en adelante que  $l = 1$ .

Juntando las ecuaciones (2), (4) y (5), podemos escribir el sistema de control que modela nuestro auto simplificado. Nuestro sistema es

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \theta) \\ \sin(\varphi + \theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideraremos que en el instante inicial  $t = 0$ , el automóvil está estacionado en la posición  $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ . Veamos cual es el efecto de algunos controles. Haciendo  $u_1 = 1$  y  $u_2 = 0$ , obtenemos

$$(7) \quad (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0)) = (0, 0, 0, 1),$$

es decir podemos movernos en la dirección  $(0, 0, 0, 1)$ , lo que obviamente se interpreta como girar el manubrio. Tomando el control  $u_1 = 0$  y  $u_2 = 1$ , vemos que

$$(8) \quad (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0)) = (1, 0, 0, 0),$$

es decir podemos movernos en la dirección  $(1, 0, 0, 0)$ , lo que representa desplazarse en la dirección definida por  $x_1$ . Veremos que podemos lograr otros movimientos combinando los controles  $u_1$  y  $u_2$ .

## 2.2. Corchetes de Lie

Miremos el sistema de control (6) en torno al origen. Si buscamos el sistema lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

que lo representa en torno a  $\vec{0}$ , donde,  $A$  y  $B$  son matrices, obtenemos

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y podemos ver que tenemos  $\dot{x}_2(t) = 0$ , y  $\dot{\varphi}(t) = 0$ , para cualquier elección de los controles  $(u_1, u_2)$ . Así, no podemos actuar ni sobre la segunda ni sobre la tercera componente, es decir, el sistema lineal (9), que representa el sistema (6) en torno al origen, no es controlable. Vemos de esta forma que el sistema lineal (9) no rescata, por ejemplo, el hecho de que un giro en el manubrio produzca un cambio en  $\varphi$ .

Esta estrategia de linealizar se justifica ya que se puede probar el teorema siguiente que nos da un resultado de controlabilidad local (solo para estados iniciales y finales “cercanos” a una referencia) para el sistema no lineal a partir del comportamiento de un sistema lineal.

**Teorema 1** *El sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$  es controlable localmente en torno a  $(x_e, u_e)$  si su sistema linealizado en torno a  $(x_e, u_e)$ , dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

*es controlable.*

**Observación 2** *Notar que que el teorema anterior no es un “si y solo si”. De hecho, veremos que el modelo del automóvil es un ejemplo de un sistema no lineal controlable cuyo linealizado no lo es.*

En el ejemplo del auto, no podemos aplicar este resultado ya que el sistema linealizado (9) no es controlable. Pero la experiencia, nos dice que si el sistema (6) realmente es un buen modelo para un automóvil, debiera ser controlable. Un auto sí se puede mover desde cualquier punto a otro acelerando y girando el manubrio. En nuestro modelo, podemos convencernos fácilmente que somos capaces de movernos en la dirección  $x_1$ . ¿Pero cómo movernos en la dirección  $x_2$ ?

**Pregunta 3** *¿Como hacemos para salir de un estacionamiento cuando estamos entre dos autos ? (¡¡Sin chocar a nadie!!)*

La respuesta viene dada por la experiencia. Debemos reiterar la siguiente secuencia:

1. Giramos las ruedas a la izquierda.
2. Avanzamos.
3. Giramos las ruedas a la derecha.
4. Retrocedemos.

Cada vez que aplicamos esta secuencia, el resultado es un desplazamiento lateral hacia la izquierda y un giro en la orientación del auto también hacia la izquierda. Ver Figura 2.

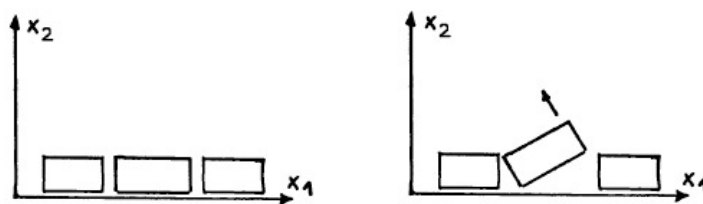


Figura 2: Auto estacionado y despues de la maniobra

Para el sistema (6), esto se traduce en considerar el siguiente control

$$(10) \quad (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)(t) = \begin{cases} (+1, 0), & t \in (0, h) \\ (0, +1), & t \in [h, 2h) \\ (-1, 0), & t \in [2h, 3h) \\ (0, -1), & t \in [3h, 4h) \end{cases}$$

donde  $h$  es un número real estrictamente positivo. Veamos que esta estrategia produce el efecto esperado. Para esto, consideraremos el siguiente sistema de control, que es de la forma del modelo del automóvil, pero más general.

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = u_1(t)f_1(x) + u_2(t)f_2(x), \\ x(0) = a. \end{cases}$$

donde  $f_1, f_2$  son funciones  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Tomemos el control (10) en el sistema (11). Usando un desarrollo de Taylor hasta el orden  $h^2$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} x(h) &= x(0) + h\dot{x}(0) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(0) + o(h^2) \\ &= a + hf_1(a) + \frac{h^2}{2}f'_1(a)f_1(a) + o(h^2) \\ \\ x(2h) &= x(h) + h\dot{x}(h) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(h) + o(h^2) \\ &= x(h) + hf_2(x(h)) + \frac{h^2}{2}f'_2(x(h))f_2(x(h)) + o(h^2) \\ &= \dots \\ &= a + h(f_1(a) + f_2(a)) + \frac{h^2}{2}(f'_1(a)f_1(a) + 2f'_2(a)f_1(a) + f'_2(a)f_2(a)) + o(h^2) \\ \\ x(3h) &= x(2h) + h\dot{x}(2h) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(2h) + o(h^2) \\ &= x(2h) - hf_1(x(2h)) + \frac{h^2}{2}f'_1(x(2h))f_1(x(2h)) + o(h^2) \\ &= \dots \\ &= a + hf_2(a) + \frac{h^2}{2}(2f'_2(a)f_1(a) - 2f'_1(a)f_2(a) + f'_2(a)f_2(a)) + o(h^2) \\ \\ x(4h) &= x(3h) + h\dot{x}(3h) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(3h) + o(h^2) \\ &= \dots \\ &= a + h^2(f'_2f_1 - f'_1f_2)(a) + o(h^2) \end{aligned}$$

**Observación 4** Como no hay un término de orden  $h$ , vemos que este desplazamiento es netamente no lineal. Se necesita una aproximación de segundo orden. Una de primer orden no es suficiente.

Esto nos dice que el control  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  produce aproximadamente un desplazamiento en la dirección  $(f'_2f_1 - f'_1f_2)(a)$ . Definamos estos objetos, que como vemos, aparecen al combinar los controles del sistema.

**Definición 5** Dados dos campos vectoriales  $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , definimos el Corchete de Lie entre  $f_1$  y  $f_2$ , denotado por  $[f_1, f_2]$ , como el campo vectorial

$$[f_1, f_2](x) = f'_2(x)f_1(x) - f'_1(x)f_2(x),$$

o por coordenadas

$$[f_1, f_2]^j(x) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_2^j}{\partial x_k} f_1^k - \frac{\partial f_1^j}{\partial x_k} f_2^k \right) (x).$$

El cálculo anterior nos dice que somos capaces de desplazar el sistema (11) en la dirección dada por el Corchete de Lie  $[f_1, f_2](a)$ .

Volviendo al ejemplo del auto, podemos calcular

$$(12) \quad [f_1, f_2](\vec{0}) = (0, 1, 1, 0)$$

Este vector implica un movimiento en la dirección  $x_2$  y en  $\varphi$ , lo que coincide con la experiencia. Ver Figura 2.

Este movimiento se consiguió combinando los controles  $u_1$  y  $u_2$ . De la misma forma, ahora podemos continuar maniobrando, para lo cual podemos combinar alternativamente los controles  $\tilde{u}$  con  $u_1$  o  $\tilde{u}$  con  $u_2$ . Si hacemos nuevamente el cálculo veremos que el control

$$(13) \quad (\hat{u}_1, \hat{u}_2)(t) = \begin{cases} (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)), & t \in (0, 4h) \\ (0, +1), & t \in [4h, 8h) \\ (-\tilde{u}_1(t - 8h), -\tilde{u}_2(t - 8h)), & t \in [8h, 12h) \\ (0, -1), & t \in [12h, 16h) \end{cases}$$

aplicado al sistema (1) produce un movimiento en la dirección  $[f_1, f_2], f_2(a)$ , y que el control

$$(14) \quad (\hat{u}_1, \hat{u}_2)(t) = \begin{cases} (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)), & t \in (0, 4h) \\ (+1, 0), & t \in [4h, 8h) \\ (-\tilde{u}_1(t - 8h), -\tilde{u}_2(t - 8h)), & t \in [8h, 12h) \\ (-1, 0), & t \in [12h, 16h) \end{cases}$$

produce un movimiento en la dirección  $[f_1, f_2], f_1(a)$ . En nuestro ejemplo modelo tenemos que

$$[f_1, f_2], f_2(x_1, x_2, \varphi, \theta) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0)$$

$$[f_1, f_2], f_1(x_1, x_2, \varphi, \theta) = (\cos(\varphi + \theta), \sin(\varphi + \theta), \sin \theta, 0) = f_2(x_1, x_2, \varphi, \theta)$$

y así vemos que

$$(15) \quad [f_1, f_2], f_2(\vec{0}) = (0, 1, 0, 0),$$

lo que finalmente nos permite mover el auto en la dirección  $x_2$ . Ver Figura 3.

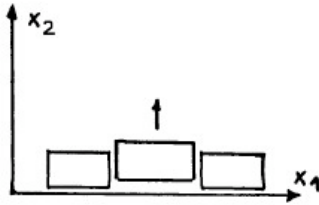


Figura 3: Desplazamiento lateral luego de maniobra

Todos los cálculos que hemos hecho nos dicen que hemos sido capaces de construir 4 controles diferentes que nos hacen desplazarnos (en una forma aproximada pero esto se puede formalizar rigurosamente) en 4 direcciones linealmente independientes dadas por (7), (8), (12) y (15). Es decir, somos capaces de mover el automóvil en cualquier dirección de  $\mathbb{R}^4$ , y así podemos definir su posición, su orientación y la orientación de las ruedas delanteras.

### 3. Estabilización

En la sección anterior hemos hablado de controlabilidad, es decir, de la capacidad de encontrar un control que lleve un sistema desde un estado inicial a uno final. En muchas situaciones el control que se calcula considerando estos estados iniciales y finales, llamado control en lazo abierto, no es robusto frente a pequeñas perturbaciones. Por ejemplo, podríamos no llegar cerca del estado final si partimos de un estado cercano al estado inicial pero diferente de éste. Si consideramos aplicaciones, un control calculado sobre un modelo podría resultar en un fracaso al implementarlo debido incluso a pequeñas diferencias entre el modelo y la realidad. Una forma de solucionar este tipo de inconvenientes es buscar controles que dependan en cada instante de tiempo del estado del sistema en ese mismo instante y no de las condiciones iniciales y finales. Este tipo de estrategias, llamadas en lazo cerrado, son más estables o robustas ya que son adaptables a los posibles errores de medición o a las posibles perturbaciones. Este tipo de controles no dependen de la condición inicial, pero tienen el inconveniente de que el estado final se alcanza generalmente solo en forma asintótica cuando el tiempo se va a  $\infty$ .

#### 3.1. Ejemplo del péndulo

Consideremos ahora otro sistema de control. Tomemos un péndulo de masa  $m$  y de largo  $l$  sobre el cual podemos ejercer una fuerza de torque  $u$  que es nuestro control. Ver Figura 4. La posición del péndulo está descrito por el ángulo  $\theta$  y se rige por la ecuación

$$(16) \quad m\ddot{\theta}(t) + mg \sin(\theta(t)) = u(t),$$

donde  $g$  es la aceleración de gravedad. Consideraremos  $m = g = l = 1$  para evitar las constantes.

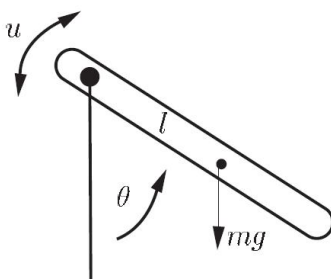


Figura 4: Péndulo.

Cuando  $u = 0$ , este sistema tiene dos puntos de equilibrio ( $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ ), y ( $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$ ). De la experiencia sabemos que la posición estacionaria ( $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$ ) es un equilibrio inestable, ya que el péndulo caerá producto de la más mínima perturbación. Nuestro objetivo en esta sección es elegir un control que haga asintóticamente estable a este punto de equilibrio, al menos para perturbaciones pequeñas.

Como nos interesa  $\theta$  cercano a  $\pi$ , hacemos el cambio de variable  $\varphi = \theta - \pi$ . Así,  $\sin \theta = -\sin \varphi$ . Como además nos interesaremos solo en pequeñas perturbaciones en torno a  $\varphi = 0$ , haremos la



aproximación

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

De esta forma, hemos linealizado (16) en torno al punto de equilibrio inestable. El nuevo sistema se escribe

$$(17) \quad \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t).$$

De ahora en adelante, nos concentraremos en este sistema de control lineal.

### 3.2. Primer Intento (lazo abierto)

Como decíamos unas líneas más arriba, el término lazo abierto se refiere a los controles calculados de antemano utilizando las condiciones iniciales y finales.

Consideremos las condiciones iniciales  $\varphi(0) = 1$ ,  $\dot{\varphi}(0) = -2$ . Busquemos un control  $u$  tal que la solución de (17) satisfaga  $\varphi \rightarrow 0$  y  $\dot{\varphi} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Inspeccionando, podemos encontrar que el control  $u(t) = 3e^{-2t}$ , nos da la solución  $\varphi(t) = e^{-2t}$  que cumple con lo pedido.

El problema aparece al considerar una perturbación, aunque sea pequeña, de la condición inicial. Fácilmente se verifica que para cualquier  $\epsilon > 0$ , la solución del sistema

$$(18) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = 3e^{-2t}, \\ \varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2 + \epsilon \end{cases}$$

está dada por

$$\varphi = e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} (e^t - e^{-t})$$

y así vemos que  $\varphi \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este es un ejemplo en donde dependiendo de las condiciones iniciales y finales deseadas, se puede encontrar un control en lazo abierto. Este control no es robusto ya que una mínima perturbación de la condición inicial produce la divergencia de la solución.

Esto nos dice que debemos buscar otras estrategias para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable ( $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$ ).

### 3.3. Segundo intento (lazo cerrado parcial)

El término lazo cerrado (o *feedback* en inglés) da cuenta de que el control depende del estado del sistema. Uno define como se comportará el control dependiendo del estado presente del sistema. Diremos del control empleado en este ejemplo, que es un lazo cerrado parcial, ya que el control solo depende de una parte del estado, en este caso de  $\varphi$ , pero no de  $\dot{\varphi}$ .

Recordemos que el sistema de control se escribe

$$(19) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \varphi_1. \end{cases}$$

donde  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  son las condiciones iniciales. Queremos encontrar un control que dependa del estado de la forma

$$(20) \quad u(t) = K(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)),$$

con  $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  alguna función, de tal manera que la soluciones de (19)-(20) satisfagan  $\varphi(t) \rightarrow 0$  y  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Analicemos la situación. Si estamos a la izquierda de la vertical ( $\varphi = \theta - \pi > 0$ ), hay que moverse a la derecha y por lo tanto debemos aplicar un torque negativo (para el signo del torque, usamos la convención de la mano derecha). De la misma forma, si estamos a la derecha de la vertical ( $\varphi = \theta - \pi < 0$ ), debemos aplicar un torque positivo. Esta idea podría implementarse con un control de la forma

$$(21) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t),$$

donde  $\alpha > 0$  es una constante que podemos elegir como mejor nos convenga.

Reemplazando (21) en (19) obtenemos

$$(22) \quad \ddot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (22), encontramos su polinomio característico

$$\lambda^2 + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones vienen dadas por  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{1-\alpha}$ . Analizaremos las posibles situaciones dependiendo del valor que escojamos para el parámetro  $\alpha$ .

- **Caso**  $\alpha < 1$ . La solución de (19)-(21) es

$$\varphi = C_1 e^{t\sqrt{1-\alpha}} + C_2 e^{-t\sqrt{1-\alpha}},$$

la que diverge si  $C_1 \neq 0$ . Esta situación divergente se da para todos los datos iniciales que satisfacen

$$\varphi_0\sqrt{1-\alpha} + \varphi_1 \neq 0,$$

por lo que vemos que esta elección de  $\alpha$  no nos da la estabilidad del punto de equilibrio.

- **Caso**  $\alpha = 1$ . En este caso tenemos  $\ddot{\varphi}(t) = 0$ , por lo que  $\dot{\varphi}(t)$  es constante. Así por ejemplo, si  $\varphi_0 = \epsilon$  y  $\varphi_1 = 0$ , con  $\epsilon > 0$  una constante, entonces la solución viene dada por  $\varphi(t) = \epsilon$ , lo que claramente no converge a 0. Pero la situación puede ser peor. Si  $\varphi_0 = 0$  y  $\varphi_1 = \epsilon$ , entonces la solución es  $\varphi(t) = t\epsilon$ , la cual diverge.

- **Caso**  $\alpha > 1$ . En este caso  $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha-1}$  y las soluciones serán oscilatorias

$$\varphi = C_1 \cos(t\sqrt{\alpha-1}) + C_2 \sin(t\sqrt{\alpha-1}).$$

En este caso, no hay divergencia pero las soluciones no convergen al origen cuando el tiempo se va a  $\infty$ . Hay una estabilidad en torno al punto de equilibrio inestable pero nosotros queremos que el punto sea asintóticamente estable.

Hemos visto que un control de la forma (21) solo nos da la estabilidad del punto de equilibrio cuando  $\alpha > 1$ , pero nunca la estabilidad asintótica. Debemos seguir buscando.

### 3.4. Tercer intento (lazo cerrado)

Acá, el control depende en cada instante del estado completo formado por  $\varphi$  y  $\dot{\varphi}$ . Veremos que en este caso, sí lograremos que el punto de equilibrio (inestable en la ausencia de control) del péndulo sea asintóticamente estable.

En el intento anterior veíamos que la mejor elección de  $\alpha$  era tomar  $\alpha > 1$ , ya que no había divergencia, sino una oscilación con amplitud constante en torno al punto de equilibrio. La idea ahora, es introducir cierta disipación de la energía que nos permita disminuir con el curso del tiempo la amplitud de esta oscilación. Cuando  $\alpha > 1$ , el torque es aplicado en la dirección correcta pero es muy fuerte y crea la oscilación. La idea a implementar ahora es la de penalizar de cierta forma la velocidad del péndulo.

Busquemos un control a lazo cerrado de la forma

$$(23) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t) - \beta\dot{\varphi}(t),$$

donde  $\beta > 0$  es una constante.

Reemplazando (23) en (19) obtenemos

$$(24) \quad \ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (24), encontramos su polinomio característico

$$\lambda^2 + \beta\lambda + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}.$$

En este caso vemos que al imponer  $\alpha > 1$ , estamos asegurando que  $\Re(\lambda_{\pm}) < 0$ , (donde  $\Re(z)$  es la parte real de  $z$ ) lo que implica la convergencia a cero de todas las soluciones de (19)-(23), es decir la estabilidad asintótica del equilibrio que era inestable sin control.

Observemos que dado  $\alpha$  fijo, podemos anular cualquier posibilidad de oscilación al imponer

$$\beta^2 \geq 4(\alpha - 1).$$

También estaríamos tentados a aumentar el valor del coeficiente  $\beta$  y esperar una tasa de convergencia mayor. Lamentablemente, esto no es cierto ya que al aumentar el valor de  $\beta$  sin mover  $\alpha$ , la mayor de las raíces del polinomio característico tiende a 0.

Por supuesto si queremos una tasa de convergencia tan alta como queramos, podemos elegir  $\beta$  suficientemente grande y  $\alpha$  tal que  $\beta^2 = 4(\alpha - 1)$ , es decir,  $\alpha = 1 + \beta^2/4$ .

No nos olvidemos de que estos controles fueron construidos para el sistema lineal (19), pero que originalmente estábamos interesados en el péndulo, cuyo modelo es la ecuación no lineal (16). A partir de los resultados del modelo lineal podemos, sin embargo, concluir un resultado local de estabilidad asintótica para la ecuación original con el control en lazo cerrado (23). Para esto se utiliza el teorema siguiente.

**Teorema 6** Consideremos el sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$ , que tiene  $(x_e, u_e)$  como punto de equilibrio (es decir  $f(x_e, u_e) = 0$ ). Si el sistema de control linealizado en torno a  $(x_e, u_e)$ , dado por

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

es asintóticamente estable con el control  $u = Rx$ , entonces, el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, R(x - x_e) + u_e)$$

es localmente asintóticamente estable en torno a  $(x_e, u_e)$ .

## 4. Control Optimal

Cuando un sistema de control es controlable, generalmente existen varios controles que cumplen con el objetivo buscado. En este caso podemos buscar el control que minimiza o maximiza cierto criterio entre todos esos controles. Esto es lo que se llama un control óptimo. Podemos buscar a minimizar la norma del control, es decir, alcanzar el objetivo deseado con el mínimo esfuerzo. Típicamente, buscaremos minimizar un costo o maximizar un beneficio asociado a la trayectoria. Veremos en este curso una introducción al problema de minimizar el tiempo empleado en transferir un sistema de control entre dos puntos dados.

### 4.1. Tiempo Optimal

Para plantear este problema, consideremos el sistema lineal

$$(25) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $u(t) \in \mathbb{R}$ , con la restricción adicional de que el control es acotado por  $-a \leq u(t) \leq a$ . El conjunto de puntos accesibles desde  $x_0$  en un tiempo  $t > 0$  se define como

$$K(x_0, t) = \{x(t); u \in L^\infty(0, T; [-a, a])\}$$

donde  $x$  es la solución de (25) con control  $u$ . Se puede demostrar que estos conjuntos tienen las siguientes características.

**Lema 7** Para todo tiempo  $t > 0$  y estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tenemos que  $K(x_0, t)$  es compacto, convexo y varía continuamente con  $t$ .

Consideremos dos puntos  $x_0$  y  $x_1$  tal que existe al menos una trayectoria de (25) satisfaciendo  $x(0) = x_0$  y  $x(T) = x_1$ , para algún tiempo  $T > 0$  y algún control  $u$ . Entre todas esas trayectorias queremos encontrar aquella que va de  $x_0$  a  $x_1$  en el mínimo tiempo posible.

Si este tiempo mínimo lo denotamos  $\hat{t}$ , entonces para todo  $t < \hat{t}$ ,  $x_1 \notin K(x_0, t)$  y consecuentemente tenemos

$$\hat{t} = \inf\{t > 0; x_1 \in K(x_0, t)\}.$$

Notemos que gracias al Lema anterior, este ínfimo se alcanza, por lo que  $\hat{t}$  está bien definido. También podemos ver que

$$x_1 \in \partial K(x_0, \hat{t}) := K(x_0, \hat{t}) - \text{int}(K(x_0, \hat{t})).$$

En efecto, si esto no fuera así, es decir, si  $x_1$  estuviera en el interior de  $K(x_0, \hat{t})$ , tendríamos la existencia de  $t < \hat{t}$ , tal que  $x_1 \in K(x_0, t)$ , lo que contradice que  $\hat{t}$  sea el tiempo minimal.

Esto nos permite asegurar que si  $x_1$  es accesible desde  $x_0$ , entonces existe un control minimal que lleva (25) desde  $x_0$  a  $x_1$ .

Llamaremos control extremal a todo control  $u$  tal que  $\forall t, x(t) \in \partial K(x_0, t)$ . Argumentando como anteriormente, podemos ver que el control de tiempo mínimo es extremal.

## 4.2. Ejemplo del carro a dos motores

En este ejemplo consideremos un carro de masa  $m = 1$ , que se mueve sobre un riel recto. El carro consta de motores propulsores, uno a cada lado. Ver Figura 5. Para describir el estado de este sistema utilizaremos  $q(t)$  para la posición y  $v(t) = \dot{q}(t)$  para la velocidad. El control vendrá dado por una función  $\alpha(t)$  que satisface  $-1 \leq \alpha(t) \leq 1$ , y que representa el empuje que recibe el carro producto de la acción de los motores.

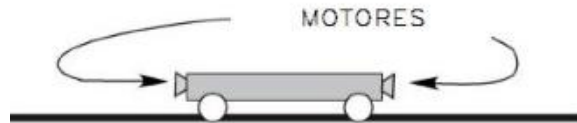


Figura 5: Carro a dos motores.

La ecuación que modela la evolución de este sistema es

$$(26) \quad \ddot{q}(t) = \alpha(t),$$

que también podemos escribir como un sistema de primer orden como sigue

$$(27) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha.$$

Dada una condición inicial para este problema, nuestro objetivo es encontrar el control  $\alpha^*$  que lleva el estado  $(q, v)$  al origen y al reposo en el mínimo tiempo posible.

Como vimos anteriormente, este problema tiene una solución óptima. Para buscarla consideraremos la situación en donde en cada momento ocupamos la máxima potencia de uno de los dos motores. Es decir, consideremos controles que toman solo dos valores  $\alpha = 1$  ó  $\alpha = -1$ . Este tipo de controles reciben el nombre de controles *bang-bang*. Para llevar el carro al reposo prendemos alternadamente el motor derecho a su máxima potencia ( $\alpha = -1$ ) o el motor izquierdo a su máxima potencia ( $\alpha = 1$ ). Para hacernos una idea de la trayectoria optimal, veamos como se comportan las soluciones de (27) cuando el control vale 1 ó -1.

- **Supongamos  $\alpha = 1$ .** En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = 1,$$

lo que implica  $v\dot{v} = \dot{q}$ , es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = \dot{q}.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$  obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = q(t) - q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$(28) \quad v^2(t) = 2q(t) + b,$$

con  $b = v^2(t_0) - 2q(t_0)$  una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (28) y como  $\dot{v} = 1$ , se mueve hacia arriba. Ver Figura 6.

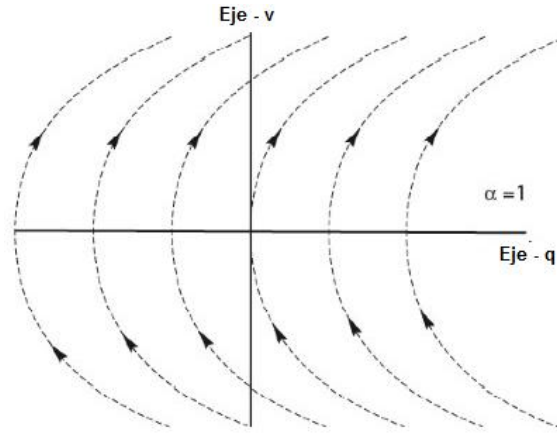


Figura 6: Curvas asociadas con  $\alpha = 1$

- **Supongamos  $\alpha = -1$ .** En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = -1,$$

lo que implica  $v\dot{v} = -\dot{q}$ , es decir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = -\dot{q}.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$  obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = -q(t) + q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$(29) \quad v^2(t) = -2q(t) + c,$$

con  $c = 2q(t_0) - v^2(t_0)$  una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (29) y como  $\dot{v} = -1$ , se mueve hacia abajo. Ver Figura 7.

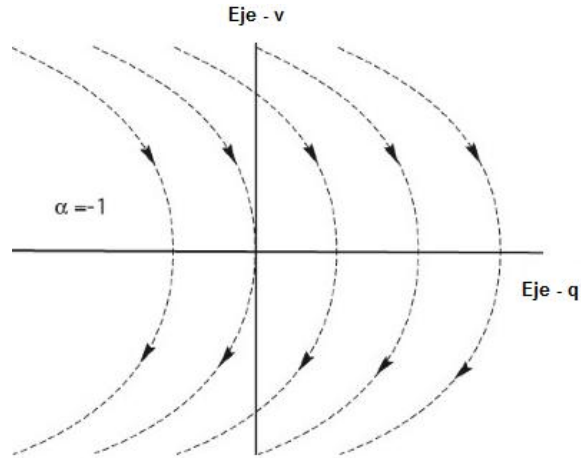


Figura 7: Curvas asociadas con  $\alpha = -1$

Con este análisis, podemos diseñar trayectorias que lleven cualquier estado inicial del carro al reposo en el origen. Como buscamos la trayectoria que cumpla esto en un tiempo mínimo, una posible respuesta viene dada por la estrategia siguiente. Supongamos que partimos de una posición positiva con velocidad positiva  $(q_0, v_0)$ . La estrategia viene dada por prender el motor derecho a su máxima capacidad ( $\alpha = -1$ ) y así desplazarnos hacia abajo por la parábola  $v^2 = -2q + (v_0^2 + 2q_0)$ , hasta que intersectemos la parábola que pasa por el origen  $v^2 = 2q$ . Ver Figura 8. En ese momento apagamos el motor derecho y prendemos el izquierdo ( $\alpha = 1$ ). Así comenzaremos a movernos hacia arriba en la parábola que pasa por el origen y llevaremos el sistema al origen y al reposo.

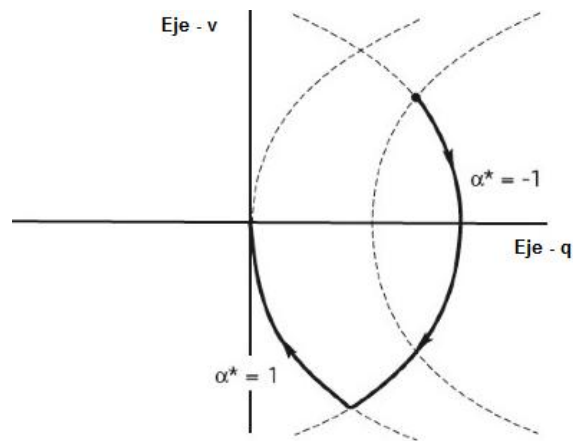


Figura 8: Estrategia

¿Pero cómo estar seguros de que ésta es la estrategia óptima? Podríamos generar infinitas trayectorias eligiendo controles que cambien de  $\alpha = -1$  a  $\alpha = 1$ , hasta intersecar la parábola que lleva al origen en reposo, es decir,  $v^2 = 2q$ .

Para responder a esta pregunta podemos utilizar la siguiente versión del Principio del Máximo de Pontryagin, que nos dirá que la estrategia de la Figura 8 es la óptima.

**Teorema 8 (Principio del Máximo en el caso lineal)** *Consideremos el sistema lineal (25), donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $u(t) \in \mathbb{R}$  con la restricción  $-a \leq u \leq a$ . El control  $\bar{u}$  es extremal en  $[0, T]$  si y solo si*

$$\bar{u}(t) = \text{signo}(ap(t)B(t)), \quad t \in [0, T]$$

donde  $p$ , llamado vector adjunto, es una solución no trivial de  $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ .

En nuestro caso

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y así tenemos que  $p(t) = (p_1(t), p_2(t)) = (p_1(0), -tp_1(0) + p_2(0))$ , lo que implica que si  $\alpha^*$  es extremal, entonces

$$\alpha^* = \text{signo}(-atp_1(0) + ap_2(0)).$$

De acá concluimos que si  $\alpha^*$  es extremal, entonces  $\alpha^*$  cambia a lo más una vez de signo. Es decir la estrategia de la Figura 8 es la óptima.

## Referencias

- [1] JEAN-MICHEL CORON, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xiv+426 pp.
- [2] LAWRENCE C. EVANS, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, Lecture notes (<http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>).
- [3] HASSAN K. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992. xii+564 pp.
- [4] HENK NIJMEIJER, ARJAN VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990. ix+467 pp.
- [5] EDUARDO D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Deterministic finite-dimensional systems, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998. xvi+531 pp.
- [6] EMMANUEL TRÉLAT, *Contrôle Optimal*, Théorie & applications. Mathématiques Concrètes, Vuibert, Paris, 2005. vi+246 pp.