

Teoría de Control, el ejemplo del péndulo*

Eduardo Cerpa**

Resumen

A través del clásico ejemplo del péndulo introduciremos la Teoría de Control. Esta teoría estudia cómo modificar la conducta de un sistema dinámico para alcanzar un objetivo final. El ejemplo considerado nos permitirá introducir los conceptos básicos de controlabilidad y estabilización en el marco de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo	2
3. Controlabilidad	3
4. Estabilización	5
4.1. Método de lazo abierto	6
4.2. Método de lazo cerrado con observación parcial	6
4.3. Método de lazo cerrado con observación completa	7

1. Introducción

Llamaremos un sistema de control a un sistema dinámico sobre el cual podemos ejercer cierta influencia eligiendo alguno de sus elementos. Este elemento que está a nuestra disposición recibirá el nombre de control. El sistema será descrito por una variable de estado que en estas notas es la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Nuestro objetivo será elegir de forma apropiada el control para que nuestro estado se comporte como nosotros queramos. Por ejemplo, podemos estudiar la factibilidad de llevar un sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo dado. El objetivo del control puede ser también volver estable un punto de equilibrio que es inestable en la ausencia del control.

La Teoría de Control surge de necesidades prácticas ligadas a solucionar distintos problemas reales. Por esto, es una rama muy ligada a aplicaciones en diferentes áreas de la ingeniería como la robótica, la aeronáutica, la electrónica y más generalmente donde la automatización de procesos sea necesaria.

*Notas para un curso de 2 horas dictado en la VI Jornada de Matemática realizada en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso los días 17, 18 y 19 de diciembre 2014.

**Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avda. España 1680, Valparaíso, Chile (eduardo.cerpa@usm.cl).

Para describir los principales temas tratados en la Teoría de Control, consideraremos el ejemplo del péndulo, un sistema descrito por una ecuación diferencial ordinaria. Para un tiempo t , las variables serán la posición del péndulo, descrita por un ángulo $\theta = \theta(t)$, y su velocidad angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, en donde el punto significa derivada con respecto al tiempo. La acción que podemos ejercer sobre el péndulo estará definido por un control $u = u(t)$ y representa una fuerza de torque.

En la sección 2 estableceremos el sistema a estudiar. La sección 3 se concentrará en la *controlabilidad* de este modelo y la *estabilización* será el objeto de estudio de la sección 4. Al final de estas notas damos algunas referencias para los interesados en desarrollar los temas mencionados en este curso y en general la Teoría de Control desde un punto de vista matemático.

2. Modelo

Consideremos un péndulo de masa m y de largo l sobre el cual podemos ejercer una fuerza de torque u que es nuestro control. Ver Figura 1. Para describir nuestro sistema, en cada tiempo t debemos indicar dónde está el péndulo $\theta(t)$ y a qué velocidad se mueve $\dot{\theta}(t)$. Estas variables se rigen por la ecuación

$$(1) \quad ml\ddot{\theta}(t) + mg \sin(\theta(t)) = u(t),$$

donde g es la aceleración de gravedad.

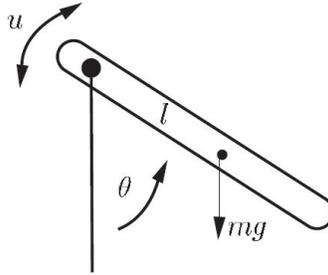


Figura 1: Péndulo.

Consideraremos $m = g = l = 1$ para evitar las constantes. Así, nos concentraremos en el sistema:

$$(2) \quad \ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) = u(t).$$

De la experiencia (¡y de nuestro conocimiento de ecuaciones diferenciales ordinarias!) sabemos que si no consideramos ningún control, es decir, $u = 0$, este sistema tiene dos puntos de equilibrio ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$), y ($\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$). Además, la posición estacionaria ($\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$) es un equilibrio inestable, ya que el péndulo caerá producto de la más mínima perturbación. En cambio, la posición estacionaria ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) es un equilibrio estable.

Nuestro objetivo en este curso es ver cómo podemos imponer una conducta al péndulo a través del control u . Estudiaremos su controlabilidad, es decir si podemos pasar de un estado a otro eligiendo apropiadamente la fuerza de torque u . Además, trataremos de elegir un control que haga

asintóticamente estable el punto de equilibrio que es inestable en la ausencia de control. Al menos para perturbaciones pequeñas.

Nos interesaremos en θ cercano a π , así que haremos el cambio de variable $\varphi = \theta - \pi$. De esta forma, $\sin \theta = -\sin \varphi$. Como además nos interesaremos solo en pequeñas perturbaciones en torno a $\varphi = 0$, haremos la aproximación

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

Lo que estamos haciendo se llama linealizar (2) en torno al punto de equilibrio inestable. El nuevo sistema, considerando condiciones iniciales, se escribe

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

De ahora en adelante, nos concentraremos en esta ecuación diferencial ordinaria lineal. Si nos mantenemos cerca del punto de equilibrio inestable, esta ecuación lineal es una buena muy aproximación del sistema no lineal y sus comportamientos serán similares. Para establecer claramente qué queremos decir con esto, enunciaremos los teoremas que nos permitirán traspasar al sistema original (1) lo que podamos demostrar para (3).

3. Controlabilidad

Consideremos el sistema de control (3), en donde tenemos el control u y el estado $(\varphi, \dot{\varphi})$. La primera pregunta que podemos hacernos es si somos capaces de elegir el control u de tal forma que la solución que parte de una condición inicial $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = (\varphi_0, \omega_0)$, llegue en un tiempo fijo $T > 0$ al estado $(\varphi(T), \dot{\varphi}(T)) = (\varphi_1, \omega_1)$, donde (φ_0, ω_0) y (φ_1, ω_1) son dos estados cualesquiera. En otras palabras, ¿somos capaces de llevar el sistema de control desde cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo? Si la respuesta es sí, decimos que el sistema es controlable.

Escribiremos (3) como un sistema de primer orden, considerando la variable $x = (x_1, x_2)$ en donde $x_1(t) = \varphi(t)$ y $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$. De esta forma el sistema se escribe

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u(t),$$

o más generalmente, en notación matricial

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

con la condición inicial dada por $x_0 = (\varphi_0, \omega_0)$. Utilizando la matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, podemos escribir la solución de (5) como

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Veamos que la siguiente matriz

$$G = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B B^t e^{(T-\tau)A^t} d\tau,$$

llamada matriz gramiana, juega un rol muy importante en la controlabilidad del sistema. Supongamos que G es invertible, probemos que el sistema es controlable. Sean $x_0, x_T \in \mathbb{R}^2$. Queremos encontrar un control u que lleve (5) de x_0 a x_T , es decir, debemos encontrar u tal que

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau = x_T,$$

o lo que es lo mismo

$$x_T - e^{TA}x_0 = \int_0^T e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau.$$

Como G es invertible, podemos definir

$$u(\tau) = B^t e^{(T-\tau)A^t} G^{-1} (x_T - e^{TA}x_0),$$

y de esta forma,

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{TA}x_0 + \underbrace{\int_0^T e^{(T-\tau)A} B B^t e^{(T-\tau)A^t} G^{-1} (x_T - e^{TA}x_0)}_G \\ &= e^{TA}x_0 + x_T - e^{TA}x_0 \\ &= x_T. \end{aligned}$$

Como esto lo podemos hacer $\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^2$, hemos demostrado que el sistema es controlable si G es una matriz invertible. En realidad, esta condición, que hemos visto que es suficiente, es también necesaria y por lo tanto un sistema como (5) es controlable si y solo si la matriz gramiana G es invertible.

Veamos en nuestro caso particular del sistema (4) si esta condición se satisface. Es fácil calcular la matriz exponencial de A y obtener que

$$e^{tA} = e^{tA^t} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio de variable $s = T - \tau$, vemos que la matriz gramiana G se calcula como

$$\frac{1}{4} \int_0^T \begin{pmatrix} e^{2s} + e^{-2s} - 2 & e^{2s} - e^{-2s} \\ e^{2s} - e^{-2s} & e^{2s} + e^{-2s} + 2 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{2T} - e^{-2T} - 4T & e^{2T} + e^{-2T} - 2 \\ e^{2T} + e^{-2T} - 2 & e^{2T} - e^{-2T} + 4T \end{pmatrix}$$

y su determinante es $\frac{1}{16}(e^{2T} + e^{-2T} - 2 - 4T^2)$ que es siempre distinto de cero para $T > 0$. En efecto, si existiera $T_0 > 0$ tal que G no fuera invertible, tendríamos que

$$h(t) := \cosh(2t) - 1 - 2t^2,$$

tiene dos ceros: $t = 0$ y $t = T_0$. Esto no puede pasar ya que eso implicaría que $\dot{h}(T_1) = 0$ para algún $T_1 \in (0, T_0)$, es decir, $\sinh(2T_1) = 2T_1$, y esto es imposible.

De esta forma vemos que G es invertible y por lo tanto (3) es controlable.

Una vez que tenemos la controlabilidad para el sistema linealizado (3), podemos obtener, mediante un argumento perturbativo, la controlabilidad local del sistema no lineal (1). Esto quiere decir que podemos llevar el sistema no lineal de cualquier condición inicial cercana al punto de equilibrio a cualquier condición final cercana también al punto de equilibrio. El resultado preciso es el siguiente.

Teorema 1 *Consideremos el sistema de control $\dot{x} = f(x, u)$, que tiene (x_e, u_e) como punto de equilibrio (es decir $f(x_e, u_e) = 0$). Si el sistema de control linealizado en torno a (x_e, u_e) , dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

es controlable, entonces, el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, u)$$

es localmente controlable en torno a (x_e, u_e) . Esto quiere decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que el sistema puede llevarse de cualquier condición inicial x_0 a cualquier condición final x_1 siempre que

$$|x_0 - x_e| \leq \varepsilon, \quad y \quad |x_1 - x_e| \leq \varepsilon,$$

es decir los datos deben estar suficientemente cercanos al punto de equilibrio.

Observación 2 *Para sistemas lineales autónomos se puede demostrar que la matriz gramiana es invertible si y solo si se satisface la siguiente condición, llamada de Kalman. Supongamos que tenemos matrices $A \in M_{n \times n}$, $B \in M_{n \times m}$. Un sistema de control lineal autónomo de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$, es controlable si y solo si la matriz*

$$[B|AB|A^2B|\dots|A^{(n-1)}B] \in M_{n \times mn}$$

tiene rango completo, es decir tiene al menos n vectores-columna linealmente independientes.

Esta condición es puramente algebraica y mucho más simple a verificar. Por ejemplo, para el péndulo linealizado (en este caso $n = 2$ y $m = 1$) es trivial ver que el sistema es controlable ya que

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Estabilización

En esta parte buscaremos controles que hagan que la solución se parezca asintóticamente a un punto de equilibrio cuando el tiempo se va a ∞ . Esto es de particular importancia cuando queremos que el sistema converja a un punto de equilibrio que es inestable en la ausencia de control. Si logramos hacer esto, diremos que el sistema es estabilizable.

Buscaremos controles que dependan, en cada instante de tiempo, del estado del sistema en ese mismo instante y no de las condiciones iniciales y finales. Este tipo de controles, llamados de lazo cerrado o feedback, son más robustos ya que son adaptables a posibles errores de medición o a posibles perturbaciones. Este tipo de controles no dependen de la condición inicial como si ocurre en el estudio de la controlabilidad.

4.1. Método de lazo abierto

Empecemos viendo qué pasa cuando busco un control a lazo abierto, lo que quiere decir que lo construyo específicamente para una condición inicial. Consideremos las condiciones iniciales $\varphi(0) = 1$, $\dot{\varphi}(0) = -2$. Busquemos un control u tal que la solución de (3) satisfaga $\varphi \rightarrow 0$ y $\dot{\varphi} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Inspeccionando, podemos encontrar que el control $u(t) = 3e^{-2t}$, nos da la solución $\varphi(t) = e^{-2t}$ que cumple con lo pedido.

El problema aparece al considerar una perturbación, aunque sea pequeña, de la condición inicial. Fácilmente se verifica que para cualquier $\epsilon > 0$, la solución del sistema

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = 3e^{-2t}, \\ \varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2 + \epsilon, \end{cases}$$

está dada por

$$\varphi = e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} (e^t - e^{-t})$$

y así vemos que $\varphi \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este es un ejemplo en donde dependiendo de las condiciones iniciales se puede encontrar un control en lazo abierto pero este control no es robusto ya que una mínima perturbación de la condición inicial produce la divergencia de la solución.

Esto nos dice que debemos buscar otras estrategias para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable ($\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$).

4.2. Método de lazo cerrado con observación parcial

El término lazo cerrado o feedback da cuenta de que el control depende del estado del sistema. Uno define como se comportará el control dependiendo del estado presente del sistema. Diremos del control empleado en esta subsección, que es un lazo cerrado parcial, ya que el control solo depende de una parte del estado, en este caso de φ , pero no de $\dot{\varphi}$.

Recordemos que el sistema de control se escribe

$$(7) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \end{cases}$$

donde φ_0 y ω_0 son las condiciones iniciales. Queremos encontrar un control que dependa del estado de la forma

$$(8) \quad u(t) = K(\varphi(t)),$$

con $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alguna función, de tal manera que las soluciones de (7)-(8) satisfagan $\varphi(t) \rightarrow 0$ y $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Analicemos la situación. Si estamos a la izquierda de la vertical ($\varphi = \theta - \pi > 0$), hay que moverse a la derecha y por lo tanto debemos aplicar un torque negativo (para el signo del torque, usamos la convención de la mano derecha). De la misma forma, si estamos a la derecha de la vertical

($\varphi = \theta - \pi < 0$), debemos aplicar un torque positivo. Esta idea podría implementarse con un control de la forma

$$(9) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t),$$

donde $\alpha > 0$ es una constante que podemos elegir como mejor nos convenga.

Reemplazando (9) en (7) obtenemos

$$(10) \quad \ddot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (10), encontramos su polinomio característico

$$\lambda^2 + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones vienen dadas por $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{1 - \alpha}$. Analizaremos las posibles situaciones dependiendo del valor que escojamos para el parámetro α .

- **Caso $\alpha < 1$.** La solución de (7)-(9) es

$$\varphi = C_1 e^{t\sqrt{1-\alpha}} + C_2 e^{-t\sqrt{1-\alpha}},$$

la que diverge si $C_1 \neq 0$. Esta situación divergente se da para todos los datos iniciales que satisfacen

$$\varphi_0\sqrt{1-\alpha} + \omega_0 \neq 0,$$

por lo que vemos que esta elección de α no nos da la estabilidad del punto de equilibrio.

- **Caso $\alpha = 1$.** En este caso tenemos $\ddot{\varphi}(t) = 0$, por lo que $\dot{\varphi}(t)$ es constante. Así por ejemplo, si $\varphi_0 = \epsilon$ y $\omega_0 = 0$, con $\epsilon > 0$ una constante, entonces la solución viene dada por $\varphi(t) = \epsilon$, lo que claramente no converge a 0. Pero la situación puede ser peor. Si $\varphi_0 = 0$ y $\omega_0 = \epsilon$, entonces la solución es $\varphi(t) = t\epsilon$, la cual diverge.
- **Caso $\alpha > 1$.** En este caso $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ y las soluciones serán oscilatorias

$$\varphi = C_1 \cos(t\sqrt{\alpha - 1}) + C_2 \sin(t\sqrt{\alpha - 1}).$$

En este caso, no hay divergencia pero las soluciones no convergen al origen cuando el tiempo se va a ∞ . Hay una estabilidad en torno al punto de equilibrio inestable pero nosotros queremos que el punto sea asintóticamente estable.

De esta forma, vemos que un control de la forma (9) solo nos da la estabilidad del punto de equilibrio cuando $\alpha > 1$, pero nunca la estabilidad asintótica. Debemos seguir buscando.

4.3. Método de lazo cerrado con observación completa

Ahora buscaremos un control que depende en cada instante del estado completo formado por φ y $\dot{\varphi}$. Queremos encontrar un control que dependa del estado de la forma

$$(11) \quad u(t) = K(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)),$$

con $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alguna función, de tal manera que la soluciones de (7)-(11) satisfagan $\varphi(t) \rightarrow 0$ y $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Veremos que en este caso, sí lograremos que el punto de equilibrio (inestable en la ausencia de control) del péndulo sea asintóticamente estable.

En el intento anterior veíamos que la mejor elección de α era tomar $\alpha > 1$, ya que no había divergencia, sino una oscilación con amplitud constante en torno al punto de equilibrio. La idea ahora, es introducir cierta disipación de la energía que nos permita disminuir con el curso del tiempo la amplitud de esta oscilación. Cuando $\alpha > 1$, el torque es aplicado en la dirección correcta pero es muy fuerte y crea la oscilación. La idea a implementar ahora es la de penalizar de cierta forma la velocidad del péndulo.

Busquemos un control a lazo cerrado de la forma

$$(12) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t) - \beta\dot{\varphi}(t),$$

donde $\beta > 0$ es una constante.

Reemplazando (12) en (7) obtenemos

$$(13) \quad \ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (13), encontramos su polinomio característico

$$\lambda^2 + \beta\lambda + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}.$$

En este caso vemos que al imponer $\alpha > 1$, estamos asegurando que $Re(\lambda_{\pm}) < 0$, (donde $Re(z)$ es la parte real de z) lo que implica la convergencia a cero de todas las soluciones de (7)-(12), es decir la estabilidad asintótica del equilibrio que era inestable sin control.

Observemos que dado α fijo, podemos anular cualquier posibilidad de oscilación al imponer

$$\beta^2 \geq 4(\alpha - 1).$$

También estaríamos tentados a aumentar el valor del coeficiente β y esperar una tasa de convergencia mayor. Lamentablemente, esto no es cierto ya que al aumentar el valor de β sin mover α , la mayor de las raíces del polinomio característico tiende a 0.

Por supuesto si queremos una tasa de convergencia tan alta como queramos, podemos elegir β suficientemente grande y α tal que $\beta^2 = 4(\alpha - 1)$, es decir, $\alpha = 1 + \beta^2/4$.

No nos olvidemos de que estos controles fueron construidos para el sistema lineal (7), pero que originalmente estábamos interesados en el péndulo, cuyo modelo es la ecuación no lineal (1). A

partir de los resultados del modelo lineal podemos, sin embargo, concluir un resultado local de estabilidad asintótica para la ecuación original con el control en lazo cerrado (12). Esto quiere decir que el sistema no lineal con el control a lazo cerrado convergerá al punto de equilibrio si partimos de una condición inicial cercana al punto de equilibrio. Para esto se utiliza el teorema siguiente.

Teorema 3 *Consideremos el sistema de control $\dot{x} = f(x, u)$, que tiene (x_e, u_e) como punto de equilibrio (es decir $f(x_e, u_e) = 0$). Si el sistema de control linealizado en torno a (x_e, u_e) , dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

es asintóticamente estable con el control $u = Kx$, entonces, el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, K(x - x_e) + u_e)$$

es localmente asintóticamente estable en torno a (x_e, u_e) , es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que sus soluciones convergerán a x_e si $|x(0) - x_e| < \varepsilon$.

Referencias

- [1] Jean-Michel Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xiv+426 pp.
- [2] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992. xii+564 pp.
- [3] Henk Nijmeijer, Arjan van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990. ix+467 pp.
- [4] Eduardo D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, Deterministic finite-dimensional systems, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998. xvi+531 pp.
- [5] Emmanuel Trélat, *Contrôle Optimal*, Théorie & Applications. Mathématiques Concrètes, Vuibert, Paris, 2005. vi+246 pp.