

# Control y optimización de sistemas dinámicos<sup>\*</sup>

Eduardo Cerpa<sup>\*\*</sup> y Pedro Gajardo<sup>\*\*</sup>

## Resumen

El objetivo de este curso es realizar una introducción a la Teoría de Control, la que estudia cómo se puede modificar la conducta de un sistema dinámico para alcanzar un cierto objetivo. El propósito planteado podría ser, por ejemplo, llevar un sistema desde un estado inicial a otro final (controlabilidad) o minimizar algún funcional que dependa de la trayectoria (control óptimo). Durante el curso nos concentraremos en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, abarcando dos tópicos básicos de esta teoría: controlabilidad y control óptimo. El curso es autocontenido, suponiendo conocimientos básicos de Álgebra Lineal, Ecuaciones Diferenciales y Análisis.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Controlabilidad</b>	<b>2</b>
2.1. Definiciones . . . . .	2
2.2. Criterio Integral . . . . .	6
2.3. Criterio de Kalman . . . . .	10
<b>3. Control Óptimo</b>	<b>13</b>
3.1. Definiciones . . . . .	13
3.2. Problema de tiempo mínimo . . . . .	14
3.3. Principio del Máximo de Pontryagin . . . . .	18
<b>4. Ejemplo del carro con dos motores</b>	<b>20</b>

---

<sup>\*</sup>Notas para un curso de 7.5 horas dictado en la Escuela del Doctorado en Matemática de Valparaíso, realizada desde el 13 al 23 de octubre de 2015.

<sup>\*\*</sup>Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avda. España 1680, Valparaíso, Chile.  
E-mail: eduardo.cerpa@usm.cl, pedro.gajardo@usm.cl

# 1. Introducción

La Teoría de Control surge de necesidades prácticas ligadas a solucionar problemas en distintos ámbitos, tales como robótica, aeronáutica, aeroespacial, electrónica, gestión de recursos naturales y más generalmente, en donde la automatización de procesos y/o la toma de decisiones sea necesaria.

Un sistema de control es un sistema dinámico sobre el cual se puede actuar mediante la elección de alguno de sus elementos. Este elemento que está a nuestra disposición, recibirá el nombre de control. Además del mencionado control, que también recibe el nombre de *entrada* o *decisión*, tenemos una variable de estado que describe el comportamiento del sistema. La finalidad de introducir este control es de influenciar el comportamiento del sistema en cuestión, con el fin de alcanzar ciertos objetivos. En muchas aplicaciones también hay que considerar un tercer elemento que es la observación o *salida* del sistema. Esta es una parte de la variable de estado que es la que se puede observar y utilizar para calcular el control.

La Teoría de Control analiza las propiedades de este tipo de sistemas. Por ejemplo, la pregunta básica que podemos estudiar es la factibilidad de llevar un sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo dado. Además, podemos considerar ciertos criterios o restricciones para la función de control o el estado. Una vez que sabemos que un sistema puede ser llevado de un estado inicial a otro final, podemos buscar trayectorias que sean óptimas bajo ciertos criterios de optimización. Típicamente, se trata de minimizar una función costo o equivalentemente maximizar una función beneficio. Dependiendo del criterio a minimizar, las trayectorias óptimas pueden ser muy distintas. Para convencerse de esto, basta pensar en las diferentes formas en que conduciremos un vehículo dependiendo si queremos minimizar ya sea el tiempo empleado o el combustible consumido.

Para describir el sistema dinámico sobre el que actúa el control, se pueden utilizar, dependiendo del problema, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones integrales, ecuaciones en derivadas parciales, sistemas discretos, ecuaciones de diferencias, etc. Esta variedad de elementos matemáticos presentes y sus múltiples aplicaciones, ubica a la Teoría de Control en la interface de diferentes áreas del conocimiento.

En este curso, estudiaremos sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y nos concentraremos en dos de los principales tópicos: la controlabilidad y el control óptimo. Al final de este documento, mencionamos referencias generales para estudiar la Teoría de Control.

## 2. Controlabilidad

### 2.1. Definiciones

En este curso trabajaremos con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (EDO) de orden uno sabiendo que de esta forma incluimos toda EDO lineal de cualquier orden. Para su descripción consideraremos, dados  $T > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , dos funciones que para cada tiempo, entregan matrices con coeficientes reales:  $A(t) \in L^\infty(0, T; M_{n \times n}(\mathbb{R}))$  y  $B(t) \in L^\infty(0, T; M_{n \times m}(\mathbb{R}))$ . El sistema de control que estudiaremos es

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

donde  $x_0$  es el estado inicial y  $\forall t \in [0, T]$  tenemos que

- El estado del sistema está dado por el vector  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ .
- El control está dado por el vector  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ .

**Definición 1 (Solución de EDO)** Dada  $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ , decimos que  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución de (1) si:

- (i)  $x \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$
- (ii)  $x(t) = x_0 + \int_0^t (A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))d\tau$

**Observación 2** Como  $x \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$  vemos que define una curva o trayectoria en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 3 (Existencia y unicidad de soluciones)** Si  $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$ , entonces existe una única solución del sistema (1).

Notemos que (ii) en Definición 1 nos da una expresión implícita para la solución de (1). Buscaremos ahora una expresión explícita para la solución. Para esto, necesitamos recordar la noción de resolvente.

**Definición 4 (Resolvente)** El resolvente  $R$  de  $\dot{x} = A(t)x$  es una función

$$R : \begin{array}{ll} [0, T] \times [0, T] & \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ (t_1, t_2) & \longrightarrow R(t_1, t_2), \end{array}$$

tal que la función  $R(\cdot, t_2) : [0, T] \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es la solución de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} R(t_1, t_2) &= A(t_1)R(t_1, t_2) \\ R(t_2, t_2) &= I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Proposición 5 (Propiedades resolvente)** El resolvente cumple lo siguiente:

1.  $R \in C([0, T] \times [0, T], M_{n \times n}(\mathbb{R}))$
2.  $R(t_2, t_2) = I_d$
3.  $R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3)$
4.  $\frac{\partial}{\partial t_1} R(t_1, t_2) = A(t_1)R(t_1, t_2)$
5.  $\frac{\partial}{\partial t_2} R(t_1, t_2) = -R(t_1, t_2)A(t_2)$

**Observación 6** Tomando  $t_1 = t_3$  en 3. de Proposición 5 obtenemos:

$$R(t_1, t_2)R(t_2, t_1) = R(t_1, t_1) \underbrace{=}_{(2)} I_d$$

Es decir  $R(t_1, t_2)^{-1} = R(t_2, t_1)$ .

**Observación 7** Si  $A$  no depende de  $t$ , entonces el resolvente es la matriz exponencial:

$$R(t_1, t_2) = e^{(t_1-t_2)A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_1 - t_2)^k A^k}{k!}$$

Si la matriz es diagonalizable, es decir  $\begin{cases} \exists P \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ invertible} \\ \exists D \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ diagonal} \end{cases}$  tal que  $A = PDP^{-1}$ , entonces la matriz  $e^{(t_2-t_1)A}$  se calcula fácilmente

$$e^{(t_2-t_1)A} = P \begin{pmatrix} e^{d_1(t_2-t_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_n(t_2-t_1)} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Cuando  $A$  no es diagonalizable, se ocupa la descomposición de Jordan de la matriz  $A$ .

Con el resolvente podemos obtener que la solución de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

está dada por

$$x(t) = R(t, 0)x_0 + \int_0^t R(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Hagamos el desarrollo en el caso simple en donde  $A$  no depende del tiempo y tenemos un término  $F$  que sí depende del tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + F \\ \dot{x} - Ax &= F && / \text{multiplicamos a la izquierda por } e^{-At} \\ e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax &= e^{-At}F && / \text{integramos en } \int_0^t \\ e^{-At}x(t) - x_0 &= \int_0^t e^{-A\tau}F(\tau)d\tau \\ e^{-At}x(t) &= x_0 + \int_0^t e^{-A\tau}F(\tau)d\tau && / \text{multiplicamos a la izquierda por } e^{At} \\ x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

El caso general se demuestra de igual forma pero aplicando las propiedades del resolvente.

**Ejemplo 8** Encontramos la solución de  $\dot{x} = Ax$ , con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Notemos que  $A$  es diagonalizable ya que es simétrica. Su polinomio característico es  $\lambda^2 - 1$  y entonces sus valores propios son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -1$ .
- Con  $\lambda = 1$ , encontramos el vector propio  $(1, 1)^*$ .
- Con  $\lambda = -1$ , encontramos el vector propio  $(-1, 1)^*$ .
- Vemos que la solución general se escribe  $x(t) = C_1(1, 1)^*e^t + C_2(-1, 1)^*e^{-t}$ .
- Las trayectorias características son  $C_1(1, 1)^*e^t$ , que se aleja del origen, y  $C_2(-1, 1)^*e^{-t}$  que converge al origen.
- El diagrama de fase está dado en la Figura 1.

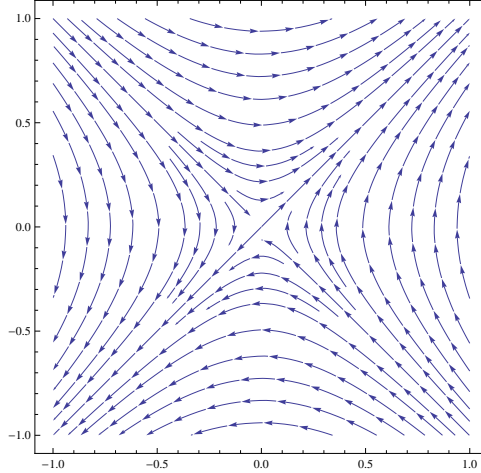


Figura 1: Diagrama de fase Ejemplo 8.

**Ejemplo 9** Notemos que si la matriz  $A$  es invertible podemos entonces resolver el sistema  $\dot{x} = Ax + F$ , donde  $F$  es un vector constante. Para esto, escribimos  $\dot{x} = Ax + AA^{-1}F$ , y hacemos el cambio de variable  $z = x + A^{-1}F$ . Así, vemos que  $z$  satisface el sistema  $\dot{z} = Az$ . Notemos que así el diagrama de fase de  $x$  es igual al de  $z$  pero desplazado en  $A^{-1}F$ .

Ahora que hemos introducido el tipo de sistemas con que trabajaremos y tenemos la forma de sus soluciones, comenzaremos a estudiar los aspectos de control. Para eso, el primer concepto será la controlabilidad.

**Definición 10 (Controlabilidad)** Diremos que el sistema (1) es controlable si  $\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\exists u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$  tal que  $x(T) = x_T$ , donde  $x = x(t)$  es la solución de (1). En este caso, decimos que el control  $u$  lleva el sistema (1) de  $x_0$  en  $t = 0$  a  $x_T$  en  $t = T$ .

**Ejemplo 11** Considere el sistema:  $\begin{cases} \dot{x} = u & x \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 & u \in \mathbb{R} \end{cases}$  ¿Es controlable?

Tomemos  $x_0, x_T \in \mathbb{R}$ . Debemos encontrar  $u$  tal que el sistema vaya de  $x_0$  a  $x_T$ .

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad / \quad \text{Integrando en } [0, T], \int_0^T$$

$$x(T) - x_0 = \int_0^T u(t) dt$$

Tenemos que encontrar  $u$  tal que

$$x_T - x_0 = \int_0^T u(t) dt$$

Vemos que basta con tomar  $u = \frac{x_T - x_0}{T}$ . Como esto lo podemos hacer para cualquier par de estados  $x_0, x_T$ , tenemos que el sistema es controlable.

**Ejemplo 12** ¿El sistema  $\begin{cases} \dot{x}_1 = u + x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases}$  es controlable?

No, no somos capaces de influir en la evolución de  $x_2$ . Sin importar qué control elijamos, siempre tendremos que  $x_2(t) = t + x_2(0)$ .

## 2.2. Criterio Integral

Nuestro objetivo ahora es buscar criterios para estudiar la controlabilidad. El primero de ellos recibe el nombre de criterio integral, y como veremos, la siguiente matriz juega un rol importante.

**Definición 13 (Matriz Gramiana)** La matriz  $\mathcal{G}$ , asociada al sistema  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ , es la matriz simétrica de  $n \times n$  dada por

$$\mathcal{G} = \int_0^T R(T, \tau)B(\tau)B^*(\tau)R^*(T, \tau)d\tau,$$

donde  $*$  denota la traspuesta. Esta matriz  $\mathcal{G}$  recibe el nombre de matriz Gramiana asociada al sistema (1).

**Teorema 14** El sistema  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  es controlable si y solo si la matriz Gramiana es invertible.

### Demostración.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\mathcal{G}$  es invertible, debemos probar que el sistema es controlable. Sean  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$  dos estados. Queremos encontrar  $u$  que lleve (1) de  $x_0$  a  $x_T$ .

Sabemos que:

$$x(t) = R(t, 0)x_0 + \int_0^t R(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Tenemos que “despejar”  $u$  tal que

$$x_T - R(T, 0)x_0 = \int_0^T R(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau.$$

Como  $\mathcal{G}$  es invertible, el siguiente control está bien definido

$$u(\tau) = B^*(\tau)R^*(T, \tau)\mathcal{G}^{-1}(x_T - R(T, 0)x_0).$$

Reemplazando vemos que

$$\begin{aligned} x(T) &= R(T, 0)x_0 + \underbrace{\int_0^T R(T, \tau)B(\tau)B^*(\tau)R^*(T, \tau)\mathcal{G}^{-1}(x_T - R(T, 0)x_0)}_{\mathcal{G}} \\ &= R(T, 0)x_0 + x_T - R(T, 0)x_0 \\ &= x_T \end{aligned}$$

Es decir  $x(T) = x_T$ . Como esto lo podemos hacer  $\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ , hemos demostrado que el sistema es controlable.

( $\implies$ ) Supongamos ahora que (1) es controlable. Debemos demostrar que  $\mathcal{G}$  es invertible. Procederemos por contradicción. Supongamos que  $\mathcal{G}$  no es invertible.

**Recuerdo:** Consideremos una matriz  $\mathcal{G} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \text{ invertible} &\Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \mathcal{G}x \end{array} \text{ es invertible} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{G}) = \{\vec{0}\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n / \mathcal{G}x = 0\} = \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{G}$  no es invertible, entonces  $\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  tal que  $\mathcal{G}y = 0$ , es decir,

$$\left( \int_0^T R(T, \tau) B(\tau) B^*(\tau) R^*(T, \tau) d\tau \right) y = 0.$$

Así, podemos escribir  $y^* \mathcal{G} y = 0$ ,

$$\int_0^T y^* R(T, \tau) B(\tau) B^*(\tau) R^*(T, \tau) y d\tau = 0.$$

Notemos que  $x^* x = x \cdot x = |x^*|^2 = |x|^2$ . Usemos que  $(AB)^* = B^* A^*$  para obtener

$$\int_0^T |y^* R(T, \tau) B(\tau)|^2 d\tau = 0.$$

Esto que implica que para casi todo (c.t.p)  $\tau \in [0, T]$  se tiene

$$y^* R(T, \tau) B(\tau) = 0.$$

Por otra parte, sabemos que las soluciones del sistema (1),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

satisfacen

$$x(T) = R(T, 0)x_0 + \int_0^T R(T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Multiplicando por  $y^*$ , vemos que

$$y^* x(T) = y \cdot x(T) = y^* R(T, 0)x_0 + \underbrace{\int_0^T y^* R(T, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau}_0.$$

Entonces, vemos que sin importar qué control  $u = u(t)$  tomemos, siempre obtendremos

$$(2) \quad y \cdot x(T) = y \cdot R(T, 0)x_0,$$

es decir no podemos llegar a un estado  $x_T$  arbitrario. Por ejemplo, tomemos  $x_0 = \vec{0}$ . De (2),  $y \cdot x(T) = 0$ , es decir, para todo control  $u$ ,  $x(T) \perp y$ . En particular, esto implica que no puedo imponer  $x(T) = y$ . Es decir, el sistema no es controlable. ■

**Ejemplo 15** Consideremos el sistema  $\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 + tu \end{cases}$   
en donde el estado es  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  y el control  $u \in \mathbb{R}$ .

- Escribamos el sistema en la forma  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)} u$$

- Encontramos el resolvente.

$$R(T, \tau) = e^{(T-\tau)A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-\tau)^k A^k}{k!} = I_d + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T-\tau & 0 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontramos  $\mathcal{G}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \int_0^T R(T, \tau) B(\tau) B^*(\tau) R^*(T, \tau) d\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} (1 \ \tau) \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T \\ T & T^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Vemos que  $\det(\mathcal{G}) = T^4 - T^4 = 0$ , es decir  $\mathcal{G}$  no es invertible, por lo tanto el sistema no es controlable.

**Ejemplo 16** Consideremos el sistema  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

- Encontramos el resolvente

$$R(T, \tau) = e^{(T-\tau)A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T-\tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontramos la matriz gramiana

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} (T-\tau)^2 & T-\tau \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Vemos que  $\mathcal{G}$  es invertible ya que  $\det(\mathcal{G}) = \frac{1}{3}T^4 - \frac{1}{4}T^4 = \frac{1}{12}T^4 \neq 0$ . En conclusión, el sistema es controlable.



Veamos ahora que el control dado por el teorema, usando la matriz gramiana, tiene la propiedad de ser el de menor norma  $L^2$ . Diremos que el control es de norma mínima. Esto nos dice que control construido es óptimo en un sentido preciso.

**Proposición 17** *Sea  $u$  el control dado por el teorema anterior tal que la solución de*

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

*satisface  $x(T) = x_1$ . Sea  $\hat{u}$  cualquier control que lleva al sistema de  $x_0$  a  $x_1$ . Entonces*

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leq \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt,$$

*con igualdad si y solo si  $u(t) = \hat{u}(t)$  para casi todo (c.t.p.)  $t \in [0, T]$ .*

**Demostración.** Llamemos  $x$  a la solución con control  $u$  y llamemos  $\hat{x}$  a la solución con control  $\hat{u}$ .

$$\text{Tenemos } \begin{cases} x(0) &= \hat{x}(0) &= x_0, \\ x(T) &= \hat{x}(T) &= x_1, \end{cases}$$

$$\text{y además } \begin{cases} x_1 &= x(T) &= R(T, 0)x_0 + \int_0^T R(T, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \\ x_1 &= \hat{x}(T) &= R(T, 0)x_0 + \int_0^T R(T, \tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Observemos que de lo anterior se deduce que

$$(3) \quad \int_0^T R(T, \tau)B(\tau)(\hat{u}(\tau) - u(\tau))d\tau = 0.$$

Podemos escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt &= \int_0^T |\hat{u}(t) - u(t) + u(t)|^2 dt \\ &= \int_0^T |\hat{u}(t) - u(t)|^2 dt + \int_0^T |u(t)|^2 dt + 2 \int_0^T (\hat{u}(t) - u(t))^* u(t) dt. \end{aligned}$$

Observemos que si  $\int_0^T (\hat{u} - u)u dt = 0$ , entonces hemos concluido la demostración. En efecto, en ese caso tendríamos

$$\int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt = \underbrace{\int_0^T |\hat{u}(t) - u(t)|^2 dt}_{\geq 0 \text{ (=0 ssi } \hat{u}=u)} + \int_0^T |u(t)|^2 dt.$$

Hemos reducido la prueba a mostrar que  $\int_0^T (\hat{u} - u)^* u dt = 0$ .

Sabemos, por construcción, que  $u = B^* R^* \mathcal{G}^{-1}(x_1 - R(T, 0)x_0)$ .

De esta forma,

$$\begin{aligned} \int_0^T (\hat{u}(t) - u(t))^* u(t) dt &= \int_0^T (\hat{u} - u)^* B^* R^* \mathcal{G}^{-1}(x_1 - R(T, 0)x_0) dt \\ &= \left( \underbrace{\int_0^T R(T, t)B(t)(\hat{u}(t) - u(t))dt}_{=0 \text{ (por (3))}} \right)^* \mathcal{G}^{-1}(x_1 - R(T, 0)x_0) = 0, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

■

**Ejercicio 18** Considere el sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

- Escriba el sistema en la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ .
- Vea que la matriz gramiana está dada por

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{2T} - e^{-2T} - 4T & e^{2T} + e^{-2T} - 2 \\ e^{2T} + e^{-2T} - 2 & e^{2T} - e^{-2T} + 4T \end{pmatrix}$$

- Vea que  $\det(\mathcal{G})$  es proporcional a  $(\cosh(2T) - 1 - 2T^2)$  y que no puede ser 0 si  $T > 0$ . Concluya sobre la controlabilidad del sistema (4).

### 2.3. Criterio de Kalman

El criterio integral visto anteriormente requiere calcular la matriz  $\mathcal{G}$  para lo que es necesario encontrar el resolvente (o matriz exponencial). Esto puede ser muy complicado, incluso para sistemas simples. Veamos ahora un criterio más fácil de verificar, que también es una condición necesaria y suficiente para tener la controlabilidad cuando las matrices  $A$  y  $B$  no dependen del tiempo.

Consideramos en esta sección sistemas definidos por matrices  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  que no dependen del tiempo. Al igual que antes, el estado vive en  $\mathbb{R}^n$  y el control en  $\mathbb{R}^m$ , es decir,

$$(5) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

**Teorema 19 (Condición de Kalman)** El sistema (5) es controlable si y solo si

$$\text{rang} [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{(n-1)}B] = n,$$

en donde *rang* es el rango de la matriz, es decir, el número de filas (o columnas) linealmente independientes de la matriz.

**Observación 20** La matriz de  $n$  filas y  $(nm)$  columnas

$$\underbrace{[B \mid \underbrace{AB}_{m \text{ columnas}} \mid \dots \mid A^{n-1}B]}_{n \cdot m \text{ columnas}}$$

recibe el nombre de matriz de Kalman. Vemos que mientras mayor sea  $m$ , la matriz de Kalman tiene más vectores columnas y así es más fácil encontrar  $n$  vectores columnas que sean linealmente independientes. Esto coincide con la intuición que diría que mientras más controles haya, más posibilidades hay de controlar el sistema.

**Observación 21** La condición no involucra el tiempo, así que si (1) es controlable para algún tiempo, lo será también para todo tiempo  $T > 0$ .

**Demostración.** Como  $A$  no depende del tiempo, tenemos que  $R(t_1, t_2) = e^{(t_1 - t_2)A}$  y así

$$\mathcal{G} = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B B^* e^{(T-\tau)A^*} d\tau.$$

$\Leftarrow$ ) Procederemos por contradicción. Supongamos que el sistema (5) no es controlable para  $T > 0$ . Del criterio integral, sabemos que  $\mathcal{G}$  no es invertible por lo que  $\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\mathcal{G}y = 0$ .

Como en la demostración anterior tenemos que  $y^* \mathcal{G} y = 0$ , o equivalentemente

$$\int_0^T |y^* e^{(T-\tau)A} B|^2 d\tau = 0.$$

Esto implica que

$$(6) \quad \eta(\tau) := y^* e^{(T-\tau)A} B = 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Tomamos  $\tau = T$  para ver que  $\eta(T) = y^* B = 0$ . Llamando  $B_i$  a las columnas de la matriz  $B$ , obtenemos

$$y^* B = [y^* B_1 | y^* B_2 | \dots | y^* B_m] = \vec{0},$$

es decir,

$$y^* B_1 = y^* B_2 = \dots = y^* B_m = 0$$

o equivalentemente

$$y \perp B_1, \quad y \perp B_2, \quad \dots, \quad y \perp B_m$$

Derivamos  $\eta$  en (6) y obtenemos

$$\eta'(\tau) = y^* (-A e^{(T-\tau)A}) B = 0.$$

Evaluamos en  $\tau = T$  y se llega a  $\eta'(T) = -y^* A B = 0$ .

Con un desarrollo como el anterior, vemos que  $y$  es perpendicular a las columnas de  $AB$ . Así sucesivamente, obtenemos después de derivar  $k$  veces

$$\eta^{(k)}(T) = (-1)^k y^* A^k B = 0.$$

Conclusión: el vector  $y$  es perpendicular a todos los vectores columnas de la matriz de Kalman, lo que es una contradicción ya que asumimos que el rango de esta matriz era  $n$ .

$\Rightarrow$ ) De nuevo procederemos por contradicción. Suponemos que el sistema es controlable y que los vectores columnas de  $[B | AB | \dots | A^{(n-1)} B]$  no generan  $\mathbb{R}^n$ . De esta forma,  $\exists y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  tal que

$$y^* A^k B = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\},$$

lo que implica que

$$y^* A^k B = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En efecto, sea  $P$  el polinomio característico de  $A$ .

$$P(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$$

Del teorema de Caley-Hamilton sabemos que  $P(A) = 0$ , es decir:

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_1A - \alpha_0$$

Usando esto, vemos que

$$\begin{aligned} y^*A^nB &\stackrel{\text{C-H}}{=} y^*(-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_0I)B \\ &= -\alpha_{n-1}\underbrace{y^*A^{n-1}B}_0 - \alpha_{n-2}\underbrace{y^*A^{n-2}B}_0 - \dots - \alpha_0\underbrace{y^*B}_0 = 0 \end{aligned}$$

Inductivamente obtenemos  $y^*A^k B = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

Con esto llegamos a que la función

$$\begin{aligned} \eta(\tau) : [0, T] &\longrightarrow M_{1 \times m}(\mathbb{R}) \\ \tau &\longrightarrow y^*e^{(T-\tau)A}B \end{aligned}$$

satisface  $\eta^{(k)}(T) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Como  $\eta$  es analítica, esta condición implica que  $\eta \equiv 0$ , es decir  $y^*e^{(T-\tau)A}B = 0$ .

Por otro lado las soluciones de (5) son tales que

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

Multiplicando por  $y^*$  llegamos a que, sin importar el control  $u$ , se tiene  $y^*x(T) = y^*e^{TA}x_0 + 0$ .

De donde vemos que no se puede controlar la cantidad  $y^*x(T)$ . Esto contradice la controlabilidad de (5).

■

**Ejemplo 22** ¿Son los siguientes sistemas controlables?

$$1. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Vemos que

$$\text{rang} \left( \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{array} \right) = 1 \neq 2,$$

por lo que el sistema no es controlable.

$$2. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

Vemos que

$$\text{rang} \left( \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right) = 2,$$

por lo que el sistema sí es controlable.

**Ejercicio 23** Considere el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ , con  $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \alpha \\ 6\alpha & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ , y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  
 ¿Para qué valores del parámetro  $\alpha$ , el sistema es controlable?

**Ejercicio 24** ¿Para qué valores de  $\alpha$  el sistema siguiente es controlable?

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha - 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^2 - \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 25 (Sistema de resortes acoplados)** Testear la controlabilidad del sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k_1x + k_2(y - x), \\ \ddot{y} = -k_2(y - x) + u. \end{cases}$$

en donde el control está dado por  $u = u(t)$ .

**Ejercicio 26** Mostrar la controlabilidad del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 3. Control Óptimo

### 3.1. Definiciones

Como en la sección anterior, estudiaremos el sistema

$$(7) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

en donde  $\forall t \geq 0$ , tenemos  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(t) \in M_{n \times n}$  y  $B(t) \in M_{n \times m}$  con  $A \in L^\infty(0, T; M_{n \times n}(\mathbb{R}))$  y  $B \in L^\infty(0, T; M_{n \times m}(\mathbb{R}))$ . Una gran diferencia será que ahora nuestro control solo podrá tomar ciertos valores, es decir  $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  un subconjunto compacto. En muchos casos tomaremos  $m = 1$  y consideraremos  $\Omega = [-a, a]$  para algún  $a > 0$ .

**Definición 27** Dados  $x_0$  y  $t$  definimos el conjunto de estados alcanzables desde  $x_0$  como

$$\mathcal{R}_\Omega(t, x_0) = \left\{ x(t) \mid x \text{ es solución de (7) con } x(0) = x_0 \wedge u \in L^\infty(0, t; \Omega) \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

**Observación 28** Llamaremos  $M(t)$  a la resolvente de (7) cuando imponemos una condición inicial en  $t = 0$ . Usando la notación de la sección anterior, tendríamos  $M(t) = R(t, 0)$ . Notemos que si  $0 \in \Omega$ , entonces  $M(t)x_0 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$  ya que basta tomar  $u \equiv 0$ .

Necesitaremos medir distancias entre conjuntos así que introducimos la siguiente noción.

**Definición 29 (Distancia entre conjuntos)** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , definimos

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{y \in A} d(y, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

donde  $d(y, B) = \inf_{x \in B} d(y, x)$ .

### 3.2. Problema de tiempo mínimo

Dados  $x_0$  y  $x_1$  en  $\mathbb{R}^n$ , queremos encontrar un tiempo  $t^*$  tal que se cumpla:

- $\exists u^* \in L^\infty(0, t^*; \Omega)$  tal que la solución de (7) satisfaga  $x^*(0) = x_0$  y  $x^*(t^*) = x_1$ .
- Si  $t < t^*$ , entonces no existe  $u \in L^\infty(0, t; \Omega)$  tal que la solución de (7) satisfaga  $x(0) = x_0$  y  $x(t) = x_1$ .

Es decir, entre todos los controles que llevan (7) de  $x_0$  a  $x_1$ , buscamos el que lo hace en el menor tiempo posible.

Veamos propiedades útiles del conjunto de estados alcanzables.

**Teorema 30** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un conjunto compacto,  $T > 0$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\forall t \in [0, T]$ , tenemos que  $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$  es convexo, compacto y varía continuamente con  $t$ .

**Demostración.**

**Convexidad de  $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$**

- Caso  $\Omega$  convexo: Sean  $x_1$  y  $\hat{x}_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Queremos demostrar que

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)\hat{x}_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0).$$

Sabemos que  $\exists u, \hat{u}$  tal que

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1 &= M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ \hat{x}_1 &= M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)\hat{u}(s)ds \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)\hat{x}_1 = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)\{\lambda u(s) + (1 - \lambda)\hat{u}(s)\}ds$$

Como  $\Omega$  es convexo,  $\lambda u + (1 - \lambda)\hat{u} \in L^\infty(0, t; \Omega)$  y vemos que  $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)\hat{x}_1) \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ .

- Caso  $\Omega$  general: Sean  $x_1$  y  $\hat{x}_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Queremos demostrar que

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)\hat{x}_1) \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0).$$

Como antes, de (8) tenemos que

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)\hat{x}_1 = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)\{\lambda u(s) + (1 - \lambda)\hat{u}(s)\}ds.$$

Acá necesitaremos el siguiente lema, cuya demostración omitimos.

**Lema 31 (Lyapunov)** Sea  $T > 0$  y  $f \in L^1(0, T; \mathbb{R}^n)$  entonces

$$\left\{ \int_{\omega} f(s) ds \mid \omega \subseteq [0, T] \text{ medible} \right\}$$

es convexo en  $\mathbb{R}^n$ .

Volvamos a nuestra demostración. Definamos

$$\begin{aligned} X &= \left\{ X_{\omega} = \begin{pmatrix} \int_{\omega} M(s)^{-1} B(s) u(s) ds \\ \int_{\omega} M(s)^{-1} B(s) \hat{u}(s) ds \end{pmatrix} \mid \omega \subseteq [0, T] \text{ medible} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \\ y &= \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u(s) ds \\ \hat{y} &= \int_0^t M(s)^{-1} B(s) \hat{u}(s) ds. \end{aligned}$$

$$\text{Vemos que } X_{\{0\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_{[0, t]} = \begin{pmatrix} y \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Por el Lema de Lyapunov, obtenemos que  $\exists \omega \subseteq [0, T]$  medible tal que  $X_{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda \hat{y} \end{pmatrix}$ .

Como  $X_{\omega} + X_{\omega^c} = X_{[0, t]} = \begin{pmatrix} y \\ \hat{y} \end{pmatrix}$  tenemos que  $X_{\omega^c} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda)y \\ (1 - \lambda)\hat{y} \end{pmatrix}$ .

Para demostrar lo que queremos, nos basta con encontrar un control  $v$  tal que

$$\int_0^t M(s)^{-1} B(s) v(s) ds = \int_{\omega} M(s)^{-1} B(s) v(s) ds + \int_{\omega^c} M(s)^{-1} B(s) v(s) ds = \lambda y + (1 - \lambda) \hat{y}.$$

Definamos

$$v(s) = \begin{cases} u(s), & \text{si } s \in \omega \\ \hat{u}(s), & \text{si } s \in \omega^c. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_0^t M^{-1}(s) B(s) v(s) ds &= \underbrace{\int_{\omega} M^{-1}(s) B(s) u(s) ds}_{\text{primera coordenada de } X_{\omega}} + \underbrace{\int_{\omega^c} M^{-1}(s) B(s) \hat{u}(s) ds}_{\text{segunda coordenada de } X_{\omega^c}} \\ &= \lambda y + (1 - \lambda) \hat{y} \end{aligned}$$

lo cual prueba la convexidad de  $\mathcal{R}_{\Omega}(t, x_0)$ .

### Compacidad de $\mathcal{R}_{\Omega}(t, x_0)$

Realizaremos la demostración para el caso  $\Omega$  convexo. Sea  $\{x_1^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}_{\Omega}(t, x_0)$  una sucesión de estados alcanzables asociados a controles  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq L^{\infty}(0, t; \Omega)$ . De esta forma tenemos

$$x^k(t) = x_1^k = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M^{-1}(s) B(s) u^k(s) ds.$$

Como  $u^k \in L^{\infty}(0, t; \Omega) \subseteq L^2(0, t; \Omega) \subseteq L^2(0, t; \mathbb{R}^m)$ , vemos que  $x^k(t) \in L^{\infty}(0, t; \mathbb{R}^n) \subseteq L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ . Como  $\Omega$  es compacto y por las propiedades de la resolvente  $M(\cdot)$  (continuidad) y de  $B(\cdot)$  (en  $L^{\infty}(0, T; M_{n \times m}(\mathbb{R}))$ ), se tendrá que existe  $C > 0$  tal que

$$\|x^k(\cdot)\|_{L^2(0, t; \mathbb{R}^n)} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Luego, la sucesión de trayectorias  $\{x^k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es acotada en  $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ .

Como la sucesión de controles  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está también acotada en  $L^2(0, t; \mathbb{R}^m)$  y  $\dot{x}^k = A(t)x^k + B(t)u^k$ , se concluye que  $\{\dot{x}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada en  $L^2(0, t; \mathbb{R}^n)$ .

Así, tenemos que la sucesión de trayectorias  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada en  $H^1(0, t; \mathbb{R}^n)$ , que se inyecta compactamente en  $C([0, t]; \mathbb{R}^n)$ . Esto nos dice que existe una subsucesión (que notaremos igual)  $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente en  $C([0, t]; \mathbb{R}^n)$ .

Por otra parte, como  $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada en  $L^2(0, T; \Omega) \subseteq L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ , existirá  $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$  tal que una subsucesión converge a  $u$ . Como estamos suponiendo  $\Omega$  convexo, se tendrá que  $u \in L^2(0, t; \Omega)$ .

Podemos de esta forma pasar al límite,

$$\begin{array}{ccc} x_1^k & = & M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u^k(s)ds \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & & M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M^{-1}(s)B(s)u(s)ds \end{array}$$

Conclusión  $x_1^k \rightarrow x_1$  con  $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ , lo que muestra la compacidad de  $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ .

### Continuidad de $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$

Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow d(\mathcal{R}_\Omega(t_1, x_0), \mathcal{R}_\Omega(t_2, x_0)) \leq \varepsilon$$

en donde la distancia es la introducida en Definición 29.

Basta con demostrar

1.  $\forall y \in \mathcal{R}_\Omega(t_2, x_0), d(y, \mathcal{R}_\Omega(t_1, x_0)) < \varepsilon.$
2.  $\forall y \in \mathcal{R}_\Omega(t_1, x_0), d(y, \mathcal{R}_\Omega(t_2, x_0)) < \varepsilon.$

Probemos (1) (propiedad (2) es análoga). Para esto, veamos que

$$\forall y \in \mathcal{R}_\Omega(t_2, x_0), \exists z \in \mathcal{R}_\Omega(t_1, x_0) \quad \text{tal que } \|y - z\| < \varepsilon.$$

Tenemos que  $y = x(t_2)$  para alguna trayectoria  $x = x(t)$  asociada a un control  $u \in L^\infty(0, t; \Omega)$ . Supongamos que  $t_1 < t_2$  y veamos que el  $z$  buscado es  $z = x(t_1)$  (utilizando el mismo control  $u$ ).

Como  $\|y - z\| = \|x(t_2) - x(t_1)\|$ , nos interesa la diferencia

$$\begin{aligned} x(t_2) - x(t_1) &= M(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} M(t_2)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds - M(t_1)x_0 - \int_0^{t_1} M(t_1)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ &= M(t_2) \int_{t_1}^{t_2} M(s)^{-1}B(s)u(s)ds + [M(t_2) - M(t_1)] \left\{ x_0 + \int_0^{t_1} M(s)^{-1}B(s)u(s)ds \right\} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$



- $I_1$  es pequeño si  $t_1 \sim t_2$  (ya que el intervalo de integración será pequeño).
- $I_2$  es pequeño si  $t_1 \sim t_2$  (ya que  $M$  es continuo).

Esto termina la demostración buscada.

■

**Definición 32** (Tiempo mínimo) Dado  $x_0$  y  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\exists T, x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$ . Sea  $t^*$  el mínimo valor de  $t$  tal que  $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ , es decir,

$$t^* = \inf\{t > 0 \mid x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)\}$$

¿El tiempo mínimo está bien definido?

La respuesta es sí, ya que el conjunto al cual se le toma ínfimo es no vacío, acotado inferiormente y cerrado (esto viene de la continuidad del mapeo  $t \rightarrow \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ ).

Esto nos permite establecer el siguiente resultado.

**Teorema 33** Si existe  $T > 0$  y  $u \in L^\infty(0, T; \Omega)$  tal que  $x(0) = x_0$  y  $x(T) = x_1$ , entonces existe una trayectoria  $x^*$  asociada a un control  $u^*$  de tiempo optimal que lleva  $x_0$  a  $x_1$ .

Por otro lado, también por la continuidad de  $t \rightarrow \mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ , se deduce

$$x_1 \in \partial\mathcal{R}_\Omega(t^*, x_0) = \mathcal{R}_\Omega(t^*, x_0) - \text{int}(\mathcal{R}_\Omega(t^*, x_0)).$$

Finalmente, utilizando argumentos similares a los de la demostración del Teorema 30 (cuando se prueba la convexidad de  $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ ), se deduce lo siguiente.

**Corolario 34 (Principio del Bang-Bang)** Denotemos  $\text{conv}(\Omega)$  a la envoltura convexa de  $\Omega$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Omega(t, x_0) &= \{x(t) \mid u \in L^\infty(0, t; \Omega)\} \\ &\parallel \\ \mathcal{R}_{\text{conv}(\Omega)}(t, x_0) &= \{x(t) \mid u \in L^\infty(0, t; \text{conv}(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Como  $\text{conv}(\Omega) = \text{conv}(\partial\Omega)$  se concluye

$$\mathcal{R}_\Omega(t, x_0) = \mathcal{R}_{\partial\Omega}(t, x_0).$$

La anterior igualdad quiere decir que los puntos alcanzables quedan descritos sólo por controles que toman valores en la frontera del conjunto  $\Omega$ . Por ejemplo, si  $\Omega = [-a, a]$  con  $a > 0$ , se tendrá

$$\mathcal{R}_\Omega(t, x_0) = \mathcal{R}_{\{-a, a\}}(t, x_0).$$

implicando que un punto es alcanzable por un control  $u$  a valores en  $\Omega = [-a, a]$  si y sólo si, es alcanzable por un control que solamente toma valores en  $\{-a, a\}$ .

**Definición 35** Un control  $u$  se dice extremal si la trayectoria asociada satisface  $x(t) \in \partial\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$  para todo  $t$ .

**Observación 36** En particular, todo control de tiempo mínimo es extremal.

### 3.3. Principio del Máximo de Pontryagin

Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $\Omega$  es convexo (ver Corolario 34). Sea  $\bar{x}_1$  tal que  $\exists T^*$  con  $\bar{x}_1 \in \mathcal{R}_\Omega(T^*, x_0)$  y sea  $u(t)$  el control de tiempo mínimo cumple que  $x(T) = \bar{x}_1$ . Así, llamamos  $T$  al tiempo optimal.

Como  $\mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$  es convexo y compacto y  $x(T) \in \partial\mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$ , existe un vector no nulo  $P_T \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\forall x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(T, x_0), \langle P_T, x_1 - x(T) \rangle \leq 0.$$

Sea un control  $\tilde{u}$  con trayectoria asociada  $\tilde{x}$ . Como  $\tilde{x}(T) \in \mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$ , se tiene

$$\langle P_T, \tilde{x}(T) \rangle \leq \langle P_T, x(T) \rangle$$

lo que implica

$$\int_0^T P_T^* M(T) M(t)^{-1} B(t) \tilde{u}(t) dt \leq \int_0^T P_T^* M(T) M(t)^{-1} B(t) u(t) dt.$$

Definiendo

$$(9) \quad p(t) = (P_T^* M(T) M(t)^{-1})^*,$$

se tiene

$$(10) \quad \int_0^T p^*(t) B(t) \tilde{u}(t) dt \leq \int_0^T p^*(t) B(t) u(t) dt \quad \forall \tilde{u}.$$

Observe que si  $M(\cdot)$  es la resolvente asociada a  $A(\cdot)$ , entonces  $M^*(\cdot)$  es la resolvente asociada a  $A^*(\cdot)$ . De la definición (9) se tiene

$$p(t) = (M^*(t))^{-1} M^*(T) P_T = M^*(-t) M^*(T) P_T.$$

Derivando  $p(t)$  con respecto a  $t$  se obtiene

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{p} &= -A^* p \\ p(T) &= P_T. \end{cases}$$

Probemos que, al ser  $u$  extremal, se tiene

$$(12) \quad p^*(t) B(t) u(t) = \max_{v \in \Omega} p^*(t) B(t) v$$

c.t.p. en  $[0, T]$ .

**Demostración:** Si (12) no fuera cierto, entonces

$$(13) \quad p^*(t) B(t) u(t) < \max_{v \in \Omega} p^*(t) B(t) v$$

sobre un conjunto  $I \subseteq [0, T]$  de medida positiva.

Definamos el siguiente control

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \notin I \\ \text{Arg max}_{v \in \Omega} p^*(t) B(t) v & \text{si } t \in I \end{cases}$$

De (13) observe que

$$p^*(t)B(t)u(t) < \max_{v \in \Omega} p^*(t)B(t)v = p^*(t)B(t)\tilde{u}(t) \quad \forall t \in I.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T p^*(t)B(t)\tilde{u}(t)dt > \int_0^T p^*(t)B(t)u(t)dt$$

lo que contradice (10), concluyendo así que (12) es cierto.

Supongamos ahora que existe un vector no nulo  $P_T \in \mathbb{R}^n$  y una función  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  solución de (11). Si para  $p(\cdot)$  se define el control

$$u(t) = \text{Arg max}_{v \in \Omega} p^*(t)B(t)v,$$

y  $x(\cdot)$  es la trayectoria asociada a  $u(\cdot)$ , concluiremos (utilizando en el sentido inverso los argumentos anteriores) que

$$(14) \quad \langle x_1 - x(T), P_T \rangle \leq 0 \quad \forall x_1 \in \mathcal{R}_\Omega(T, x_0).$$

Veamos que esto implica

$$x(T) \in \partial \mathcal{R}_\Omega(T, x_0).$$

Supongamos que no. Si  $x(T) \in \text{int} \mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$  entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que la bola centrada en  $x(T)$  y de radio  $\varepsilon$ , que notaremos  $B(x(T), \varepsilon)$ , está contenida en  $\mathcal{R}_\Omega(T, x_0)$ . Así, de (14) se deduce

$$\langle z, P_T \rangle \leq 0 \quad \forall z \in B(0, \varepsilon),$$

implicando  $P_T = 0$  lo que es una contradicción.

**Conclusión:** Acabamos de demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 37** *Para el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

el control  $u$  es extremal si y solo si existe un vector no nulo  $P_T \in \mathbb{R}^n$  y  $p = p(t)$  solución de

$$\begin{cases} \dot{p} &= -A^*p \\ p(T) &= P_T. \end{cases}$$

tal que

$$p^*(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p^*(t)B(t)v$$

c.t.p. en  $[0, T]$

**Observación 38**

1. El vector  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  recibe el nombre de vector adjunto.

2.  $p(T)$  ó  $p(0)$  no se conoce explícitamente, por lo que no se puede usar el teorema anterior para construir el control en forma directa.
3. Si  $m = 1$ , es decir  $u(t) \in \mathbb{R}$  y  $\Omega = [-a, a]$  con  $a > 0$  entonces el teorema anterior implica que

$$u(t) = a \operatorname{signo}[B^*(t)p(t)].$$

Por lo anterior la función  $B^*(t)p(t)$  recibe el nombre de función de conmutación. Un tiempo  $\hat{t}$  en donde  $B^*(t)p(t)$  cambia de signo, recibe el nombre de tiempo de conmutación.

4. Si  $u$  es extremal, entonces de (14) se deduce que  $p(t)$  es normal exterior a  $\mathcal{R}_\Omega(t, x_0)$ .

**Ejercicio 39 (Ver Ejemplo 8)** Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = x(t) + u(t),$$

con la restricción  $|u(t)| \leq 1$ .

- Estudiar cómo son las trayectorias con controles extremales.
- Encuentre el conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que si  $(x(0), y(0)) \in D$ , entonces el problema de tiempo mínimo para llegar a  $(0, 0)$  posee una solución. Bosqueje, en el diagrama de fase, cómo son las trayectorias óptimas.

## 4. Ejemplo del carro con dos motores

En este ejemplo consideraremos un carro de masa unitaria, que se mueve sobre un riel recto. El carro consta de motores propulsores, uno a cada lado. Ver Figura 2. Para describir el estado de este sistema utilizaremos  $q(t)$  para la posición y  $v(t) = \dot{q}(t)$  para la velocidad. El control vendrá dado por una función  $\alpha(t)$  que satisface  $-1 \leq \alpha(t) \leq 1$ , y que representa el empuje que recibe el carro producto de la acción de los motores.

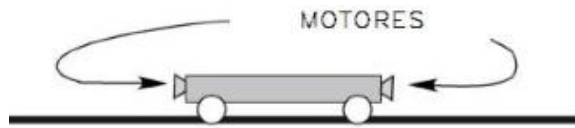


Figura 2: Carro a dos motores.

La ecuación que modela la evolución de este sistema es

$$(15) \quad \ddot{q}(t) = \alpha(t),$$

que también podemos escribir como un sistema de primer orden como sigue

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha.$$

Dada una condición inicial  $q(0) = q_0$  y  $v(0) = v_0$  para este problema, nuestro objetivo es encontrar el control  $\alpha^*$  que lleva el estado  $(q, v)$  al origen y al reposo en el mínimo tiempo posible.

Este sistema es controlable. En efecto, se encuentra que la matriz de Kalman es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Observación 40** *Notemos que el criterio integral, aplicado a este sistema en Ejemplo 16, es mucho más complicado.*

Podemos así aplicar el Teorema 33 para demostrar que el problema de tiempo mínimo tiene una solución óptima. Para buscarla usamos el Teorema 37, que nos lleva a resolver el sistema adjunto

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Se obtiene que

$$\dot{p}_1 = 0 \Rightarrow p_1(t) = p_1(0)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 = -p_1(0) \Rightarrow p_2(t) = -tp_1(0) + p_2(0)$$

de donde la función de conmutación resulta ser

$$B^*(t)p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_2(t) = -tp_1(0) + p_2(0).$$

Esto nos dice que el control  $\alpha^*$  de tiempo mínimo satisface

$$\alpha^*(t) = \text{signo}(-tp_1(0) + p_2(0))$$

por lo que concluimos que cambia a lo más una vez de signo.

Debemos encontrar cómo son las trayectorias con controles extremales  $\alpha = 1$  ó  $\alpha = -1$ . Este tipo de controles reciben el nombre de controles *bang-bang*. Para llevar el carro al reposo prendemos alternadamente el motor derecho a su máxima potencia ( $\alpha = -1$ ) o el motor izquierdo a su máxima potencia ( $\alpha = 1$ ). Para hacernos una idea de la trayectoria optimal, veamos como se comportan las soluciones de (16) cuando el control vale 1 ó -1.

- **Supongamos  $\alpha = 1$ .** En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = 1,$$

lo que implica  $v\dot{v} = \dot{q}$ , es decir,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = \dot{q}.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$  obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = q(t) - q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$(17) \quad v^2(t) = 2q(t) + b,$$

con  $b = v^2(t_0) - 2q(t_0)$  una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (17) y como  $\dot{v} = 1$ , se mueve hacia arriba. Ver Figura 3.

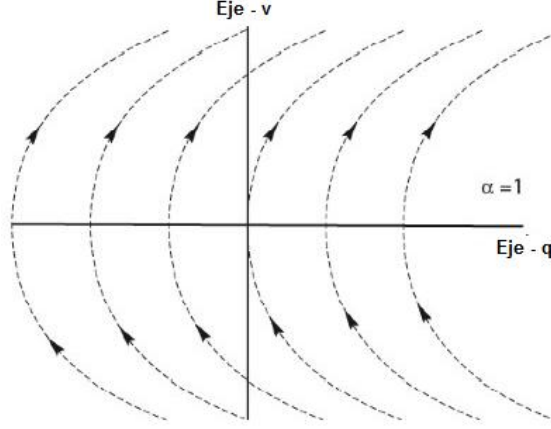


Figura 3: Curvas asociadas con  $\alpha = 1$ .

- **Supongamos**  $\alpha = -1$ . En este caso las ecuaciones son

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = -1,$$

lo que implica  $v\dot{v} = -\dot{q}$ , es decir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v^2) = -\dot{q}.$$

Integrando de  $t_0$  a  $t$  obtenemos

$$\frac{v^2(t)}{2} - \frac{v^2(t_0)}{2} = -q(t) + q(t_0),$$

de donde podemos escribir

$$(18) \quad v^2(t) = -2q(t) + c,$$

con  $c = 2q(t_0) - v^2(t_0)$  una constante. Esto nos dice que la trayectoria permanece en la curva (18) y como  $\dot{v} = -1$ , se mueve hacia abajo. Ver Figura 4.

Con este análisis, podemos diseñar trayectorias que lleven cualquier estado inicial del carro al reposo en el origen. Como buscamos la trayectoria que cumpla esto en un tiempo mínimo, una posible respuesta viene dada por la estrategia siguiente. Supongamos que partimos de una posición positiva con velocidad positiva  $(q_0, v_0)$ . La estrategia viene dada por prender el motor derecho a su máxima capacidad ( $\alpha = -1$ ) y así desplazarnos hacia abajo por la parábola  $v^2 = -2q + (v_0^2 + 2q_0)$ , hasta que intersectemos la parábola que pasa por el origen  $v^2 = 2q$ . Ver Figura 5. En ese momento apagamos el motor derecho y prendemos el izquierdo ( $\alpha = 1$ ). Así comenzaremos a movernos hacia arriba en la parábola que pasa por el origen y llevaremos el sistema al origen y al reposo.

Gracias al Principio del Máximo de Pontryagin, podemos estar seguros que la estrategia de la Figura 5 es la óptima.

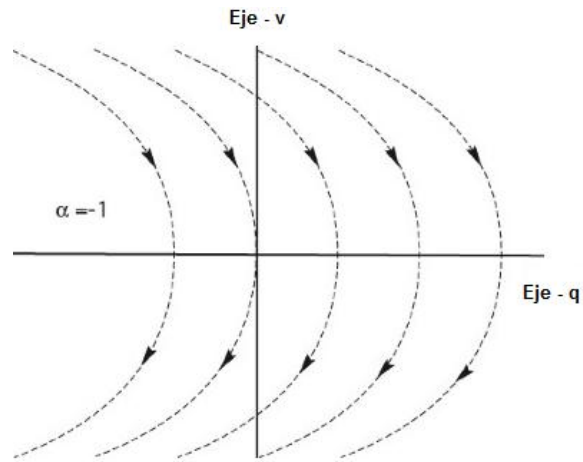


Figura 4: Curvas asociadas con  $\alpha = -1$ .

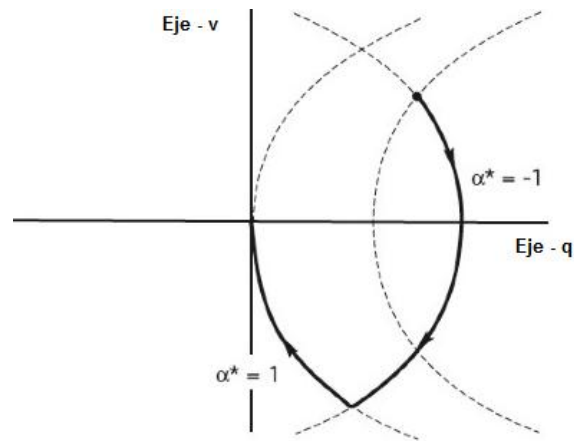


Figura 5: Estrategia óptima.

## Referencias

- [1] D. BERTSEKAS, *Dynamic programming and optimal control*, Vol. I, Third edition. Athena Scientific, Belmont, MA, 2005.
- [2] F. BONNANS, P. ROUCHON, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*, Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [3] J.-M. CORON, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [4] L. C. EVANS, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, Lecture notes ([http://math.berkeley.edu/~sim\\$evans/control.course.pdf](http://math.berkeley.edu/~sim$evans/control.course.pdf)).
- [5] H. K. KHALIL, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [6] H. NIJMEIJER, A. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [7] E. D. SONTAG, *Mathematical Control Theory*, Deterministic finite-dimensional systems, Second edition, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] E. TRÉLAT, *Contrôle Optimal*, Théorie & applications. Mathématiques Concrètes, Vuibert, Paris, 2005.