

# Control y estabilización del péndulo\*

Eduardo Cerpa\*\*

## Resumen

El modelo matemático para estudiar el comportamiento de un péndulo simple viene dado por una ecuación diferencial ordinaria no lineal. A través de este clásico ejemplo introduciremos dos aspectos fundamentales en Teoría de Control, a saber, la controlabilidad y la estabilización. Para cada uno de estos temas obtendremos resultados para este sistema no lineal. Estos serán de carácter local lo que significa que serán válidos cuando el estado del sistema se mantiene cercano a un punto de equilibrio. Usaremos el punto de equilibrio que es inestable (posición *vertical arriba*) ya que es el más interesante a estudiar.

## Índice

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Introducción</b>                     | <b>1</b> |
| <b>2. Modelo matemático del péndulo</b>    | <b>2</b> |
| <b>3. Controlabilidad</b>                  | <b>4</b> |
| 3.1. Sistema lineal . . . . .              | 5        |
| 3.2. Sistema no lineal . . . . .           | 6        |
| <b>4. Estabilización</b>                   | <b>8</b> |
| 4.1. Sistema lineal . . . . .              | 9        |
| 4.1.1. Método de lazo cerrado I . . . . .  | 9        |
| 4.1.2. Método de lazo cerrado II . . . . . | 11       |
| 4.1.3. Función de Lyapunov . . . . .       | 12       |
| 4.2. Sistema no lineal . . . . .           | 13       |

## 1. Introducción

La Teoría de Control es una rama de la Matemática y la Ingeniería que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos y cómo este puede ser modificado con un objetivo determinado. Este objetivo puede ser por ejemplo automatizar algún proceso o hacer que opere de forma óptima según algún criterio predeterminado. Por esto, es una rama muy ligada a aplicaciones en diferentes áreas como la robótica, la aeronáutica, la electrónica o la aeroespacial, por nombrar solo algunas.

---

\*Notas para un curso de 3 horas dictado en ENIM 2016 que tuvo lugar en la Universidad Técnica Federico Santa María los días 9, 10 y 11 de noviembre 2016.

\*\*Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Avda. España 1680, Valparaíso, Chile.  
E-mail: eduardo.cerpa@usm.cl

Llamaremos un sistema de control a un sistema dinámico sobre el cual podemos ejercer cierta influencia eligiendo alguno de sus elementos. Este elemento que está a nuestra disposición recibirá el nombre de control. El sistema será descrito por una variable de estado que en estas notas es la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Nuestro objetivo será elegir de forma apropiada el control para que nuestro estado se comporte como nosotros queramos. Por ejemplo, podemos estudiar la controlabilidad, que es la factibilidad de llevar un sistema desde un estado inicial a un estado final en un tiempo dado, o podemos también estudiar la estabilización, que se preocupa de volver estable un punto de equilibrio que es inestable en la ausencia del control.

Para describir estos dos temas de la Teoría de Control, la controlabilidad y la estabilización, consideraremos el ejemplo del péndulo, un sistema descrito por una ecuación diferencial ordinaria no lineal. Para un tiempo  $t$ , describiremos el estado del sistema mediante la posición del péndulo, descrita por un ángulo  $\varphi = \varphi(t)$ , y su velocidad angular  $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$ , en donde el punto significa derivada con respecto al tiempo. La acción que podemos ejercer sobre el péndulo estará definido por un control  $u = u(t)$  que representa una fuerza de torque.

De esta forma, a través de este clásico ejemplo introduciremos dos aspectos fundamentales en Teoría de Control. Para cada uno de estos temas obtendremos resultados para el péndulo. Veremos que en ambos casos utilizaremos una estrategia similar: linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio que nos interesa; estudiar la propiedad deseada para este sistema lineal; y luego, mediante un argumento perturbativo, obtener la propiedad para el sistema no lineal original.

La organización de estas notas es la siguiente. En la Sección 2 estableceremos el sistema a estudiar. La Sección 3 se concentrará en la controlabilidad de este modelo y la estabilización será el objeto de estudio de la Sección 4. Debido a la estrategia descrita anteriormente, para la controlabilidad y la estabilización obtendremos resultados de carácter local, lo que significa que serán válidos cuando el estado del sistema se mantiene cercano al punto de equilibrio en torno al cual linealizamos el sistema. En el caso del péndulo, existen dos puntos de equilibrio: *vertical arriba* y *vertical abajo*. Nosotros usaremos el primero ya que es inestable (ante una pequeña perturbación, el péndulo se alejará de esta posición de equilibrio) y así es el más interesante a estudiar.

Al final, en las Referencias, listamos una serie de libros recomendables para estudiar matemáticamente estos y otros tópicos en Teoría de Control.

## 2. Modelo matemático del péndulo

Consideremos un péndulo de masa  $m$  y de largo  $l$  sobre el cual podemos ejercer una fuerza de torque  $u$  que es nuestro control (ver Figura 1). Para describir nuestro sistema, en cada tiempo  $t$  debemos indicar dónde está el péndulo,  $\theta(t)$ , y a qué velocidad angular se mueve,  $\omega(t)$  ó  $\dot{\theta}(t)$ . Estas variables se rigen por la ecuación

$$(1) \quad ml\ddot{\theta}(t) + mg \sin(\theta(t)) = u(t),$$

donde  $g$  es la aceleración de gravedad. Consideraremos  $m = g = l = 1$  para evitar las constantes. Así, nos concentraremos en el sistema

$$(2) \quad \ddot{\theta}(t) + \sin(\theta(t)) = u(t).$$

De la experiencia (¡y de nuestro conocimiento de ecuaciones diferenciales ordinarias!) sabemos que si no consideramos ningún control, es decir,  $u = 0$ , este sistema tiene dos puntos de equilibrio:

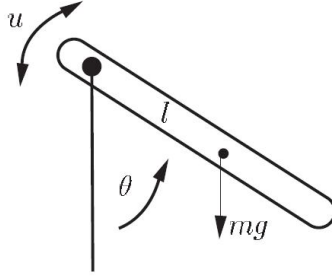


Figura 1: Péndulo.

*vertical abajo*, dado por  $(\theta_e = 0, \omega_e = 0)$ , y *vertical arriba*, dado por  $(\theta_e = \pi, \omega_e = 0)$ . Además, la posición estacionaria  $(\theta_e = \pi, \omega_e = 0)$  es un equilibrio inestable, ya que el péndulo caerá producto de la más mínima perturbación y se alejará de esta forma del equilibrio *vertical arriba*. En cambio, la posición estacionaria *vertical abajo*  $(\theta_e = 0, \omega_e = 0)$  es un equilibrio estable ya que si perturbamos un poco esta posición, el péndulo no se alejará de ella sino que se mantendrá oscilando en su entorno.

Nuestro objetivo en este curso es ver cómo podemos imponer una conducta al péndulo a través del control  $u$ . Estudiaremos su controlabilidad, es decir si podemos pasar de un estado a otro eligiendo apropiadamente la fuerza de torque  $u$ . Además, trataremos de elegir un control que haga asintóticamente estable el punto de equilibrio que es inestable en la ausencia de control, al menos para perturbaciones pequeñas.

En todo este curso nos interesaremos en  $\theta$  cercano a  $\pi$ , así que haremos el cambio de variable  $\varphi = \theta - \pi$ . De esta forma,  $\sin \theta = -\sin \varphi$ , y el sistema lo podemos escribir como

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \sin(\varphi(t)) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Cuando nos interesaremos solo en pequeñas perturbaciones en torno a  $\varphi = 0$ , haremos la aproximación

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

Lo que estamos haciendo se llama linealizar (3) en torno al punto de equilibrio inestable. Notemos que en las nuevas variables el punto de equilibrio inestable es  $(\varphi_e = 0, \omega_e = 0)$ . El sistema linealizado que se obtiene es

$$(4) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Sabemos que en ecuaciones diferenciales muchas veces conviene escribir una ecuación de orden superior como un sistema de orden uno. Por eso, introducimos las variables

$$(5) \quad x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad x_{10} = \varphi_0, \quad x_{20} = \omega_0, \quad x = (x_1, x_2)^*, \quad x_0 = (x_{10}, x_{20})^*,$$

en donde \* significa traspuesta, y obtenemos que (3) puede escribirse como

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \sin(x_1(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t),$$

o más generalmente, introduciendo una función apropiada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De la misma forma, el sistema lineal (4) puede escribirse como

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u(t),$$

o más generalmente, en notación matricial,

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

**Observación 1** *Asumiremos sin demostración que el sistema no lineal (6) que modela el péndulo tiene siempre una única solución para  $u \in L^\infty(0, \infty)$  que además es global en tiempo. Esta solución  $x = x(t)$  es una función continua de  $[0, \infty[$  en  $\mathbb{R}^2$  y satisface la ecuación en su versión integrada (ver [4, Apéndice C]). En el caso del sistema lineal (9), como veremos en la siguiente sección, la solución se puede expresar en términos de la matriz exponencial asociada a  $A$  y así se tiene la solución de forma explícita.*

### 3. Controlabilidad

¿Somos capaces de llevar un sistema de control desde cualquier estado inicial a cualquier estado final en un tiempo dado? Si la respuesta es sí, decimos que el sistema es controlable. Introduzcamos de forma precisa los conceptos que estudiaremos.

**Definición 2** *Diremos que el sistema lineal (9) es controlable en tiempo  $T$  si para todo par de estados  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^2$ , existe un control  $u \in L^\infty(0, T)$  tal que la solución de (9) satisface  $x(T) = x_T$ .*

Con respecto al sistema no lineal, además del análogo a la definición anterior de controlable, aparece el concepto de localmente controlable en torno a un punto de equilibrio.

**Definición 3** *Consideremos el sistema no lineal (7), y  $(x_e, u_e)$  un punto de equilibrio, es decir, tal que  $f(x_e, u_e) = 0$ . Diremos que el sistema es localmente controlable en torno a  $x_e$  en tiempo  $T$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $x_0, x_T$  con*

$$|x_0 - x_e| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |x_T - x_e| \leq \varepsilon,$$

*existe  $u \in L^\infty(0, T)$  tal que la solución de (7) satisface  $x(T) = x_T$ .*

### 3.1. Sistema lineal

Utilizando la matriz exponencial  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ , podemos escribir la solución de (9) como

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Veamos que la siguiente matriz

$$(10) \quad G = \int_0^T e^{(T-\tau)A}BB^*e^{(T-\tau)A^*}d\tau,$$

llamada matriz gramiana, juega un rol muy importante en la controlabilidad del sistema. Supongamos que  $G$  es invertible y probemos que el sistema es controlable. Sean  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^2$ . Queremos encontrar un control  $u$  que lleve (9) de  $x_0$  a  $x_T$ , es decir, debemos encontrar  $u$  tal que

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-\tau)A}Bu(\tau)d\tau = x_T,$$

o lo que es lo mismo

$$x_T - e^{TA}x_0 = \int_0^T e^{(T-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$$

Como  $G$  es invertible, podemos definir

$$u(\tau) = B^*e^{(T-\tau)A^*}G^{-1}(x_T - e^{TA}x_0),$$

y de esta forma,

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{TA}x_0 + \underbrace{\int_0^T e^{(T-\tau)A}BB^*e^{(T-\tau)A^*}d\tau}_G G^{-1}(x_T - e^{TA}x_0) \\ &= e^{TA}x_0 + x_T - e^{TA}x_0 \\ &= x_T. \end{aligned}$$

Como esto lo podemos hacer para todo  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^2$ , hemos demostrado que el sistema es controlable si  $G$  es una matriz invertible. En realidad, esta condición, que hemos visto que es suficiente, es también necesaria y por lo tanto se puede demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4** *El sistema lineal (9) es controlable si y solo si la matriz gramiana  $G$  definida en (10) es invertible*

**Observación 5** *Cuando las matrices  $A, B$  dependen del tiempo, se obtiene el mismo teorema pero en la definición de matriz gramiana se reemplaza la matriz exponencial por la matriz resolvente asociada a  $A$ , es decir, la solución de  $\dot{R} = AR$ .*

Veamos en nuestro caso particular del sistema (9) si esta condición se satisface. Es fácil calcular la matriz exponencial de  $A$  y obtener que

$$e^{tA} = e^{tA^*} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio de variable  $s = T - \tau$ , vemos que la matrix gramiana  $G$  se calcula como

$$\frac{1}{4} \int_0^T \begin{pmatrix} e^{2s} + e^{-2s} - 2 & e^{2s} - e^{-2s} \\ e^{2s} - e^{-2s} & e^{2s} + e^{-2s} + 2 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{2T} - e^{-2T} - 4T & e^{2T} + e^{-2T} - 2 \\ e^{2T} + e^{-2T} - 2 & e^{2T} - e^{-2T} + 4T \end{pmatrix}$$

y su determinante es  $\frac{1}{16}(e^{2T} + e^{-2T} - 2 - 4T^2)$  que es siempre distinto de cero para  $T > 0$ . En efecto, si existiera  $T_0 > 0$  tal que  $G$  no fuera invertible, tendríamos que

$$h(t) := \cosh(2t) - 1 - 2t^2,$$

tiene dos ceros, en  $t = 0$  y  $t = T_0$ . Esto no puede pasar ya que eso implicaría que  $\dot{h}(T_1) = 0$  para algún  $T_1 \in (0, T_0)$ , es decir,  $\sinh(2T_1) = 2T_1$ , y esto es imposible.

De esta forma vemos que  $G$  es invertible y por lo tanto (9) es controlable. Hemos demostrado de esta forma el siguiente resultado.

**Teorema 6** *Para cualquier tiempo  $T > 0$  el sistema (9) es controlable.*

**Observación 7** *Para sistemas lineales autónomos (es decir con matrices  $A$  y  $B$  que no dependen del tiempo) se puede demostrar que la matriz gramiana es invertible si y solo si se satisface la siguiente condición, llamada de Kalman. Supongamos que tenemos matrices  $A \in M_{n \times n}$ ,  $B \in M_{n \times m}$ . Un sistema de control lineal autónomo de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ , es controlable si y solo si la matriz*

$$[B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \in M_{n \times mn}$$

*tiene rango completo, es decir tiene al menos  $n$  vectores-columna linealmente independientes.*

*Esta condición es puramente algebraica y mucho más simple a verificar. Por ejemplo, para el péndulo linealizado (en este caso  $n = 2$  y  $m = 1$ ) es trivial ver que el sistema es controlable ya que*

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Sistema no lineal

Una vez que tenemos la controlabilidad para el sistema linealizado (4), podemos obtener, mediante un argumento perturbativo, la controlabilidad local del sistema no lineal (3). Definamos la función

$$\Lambda : (\varphi_0, \omega_0, u) \in \mathbb{R}^2 \times L^\infty(0, T) \longrightarrow (\varphi_0, \omega_0, \varphi(T), \dot{\varphi}(T)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

en donde  $\varphi$  es la solución del sistema no lineal (3) con condición inicial  $(\varphi_0, \omega_0)$  y control  $u$ .

Se puede demostrar que  $\Lambda$  está bien definida y que es además una función  $C^1$ . Lo que queremos hacer es invertir esta función, al menos localmente en una vecindad del punto  $(0, \Lambda(0))$ . Esto nos dirá que el sistema es localmente controlable en torno al punto de equilibrio definido por

$$(\varphi_e = 0, \omega_e = 0, u_e = 0).$$

La derivada de  $\Lambda$  en  $(0, 0, 0)$  viene dada por

$$D\Lambda(0, 0, 0) : (\varphi_0, \omega_0, u) \in \mathbb{R}^2 \times L^\infty(0, T) \longrightarrow (\varphi_0, \omega_0, \varphi(T), \dot{\varphi}(T)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

en donde  $\varphi$  es la solución del sistema lineal (4) con condición inicial  $(\varphi_0, \omega_0)$  y control  $u$ . En efecto, asumiendo que  $\Lambda$  es  $C^1$ , podemos calcular  $D\Lambda(0, 0, 0)(\varphi_0, \omega_0, u)$  como la derivada direccional de  $\Lambda$  en  $(0, 0, 0)$  en la dirección  $(\varphi_0, \omega_0, u)$ . Así

$$D\Lambda(0, 0, 0)(\varphi_0, \omega_0, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \Lambda(h\varphi_0, h\omega_0, hu) - \Lambda(0, 0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Lambda(h\varphi_0, h\omega_0, hu)}{h}.$$

Para calcular este límite, definamos  $R_h$  como la solución de

$$(11) \quad \begin{cases} \ddot{R}_h(t) - \sin(R_h(t)) = hu(t), \\ R_h(0) = h\varphi_0, \dot{R}_h(0) = h\omega_0, \end{cases}$$

y de esta forma  $\Lambda(h\varphi_0, h\omega_0, hu) = (h\varphi_0, h\omega_0, R_h(T), \dot{R}_h(T))$ . Definamos ahora

$$Y_h(t) = \frac{1}{h} R_h(t),$$

que es solución de

$$(12) \quad \begin{cases} \ddot{Y}_h(t) - \frac{1}{h} \sin(R_h(t)) = u(t), \\ Y_h(0) = \varphi_0, \dot{Y}_h(0) = \omega_0, \end{cases}$$

y con el cual tenemos

$$\frac{\Lambda(h\varphi_0, h\omega_0, hu)}{h} = (\varphi_0, \omega_0, Y_h(T), \dot{Y}_h(T)).$$

Por Teorema del Valor Medio, existe  $\xi_h(t)$  con  $|\xi_h(t)| \in (0, |R_h(t)|)$  tal que

$$\sin(R_h(t)) = R_h(t) \cos(\xi_h(t)),$$

y esto nos permite escribir

$$(13) \quad \begin{cases} \ddot{Y}_h(t) - Y_h(t) \cos(\xi_h(t)) = u(t), \\ Y_h(0) = \varphi_0, \dot{Y}_h(0) = \omega_0. \end{cases}$$

Nos falta solo tomar límite cuando  $h$  tiende a 0. Notemos de (11) que por continuidad de la solución con respecto a los datos, tenemos que  $R_h \rightarrow 0$  si  $h \rightarrow 0$  y por lo tanto  $\xi_h \rightarrow 0$  si  $h \rightarrow 0$ . De esta forma vemos que  $Y_h \rightarrow Y$  si  $h \rightarrow 0$ , donde  $Y$  es solución de

$$(14) \quad \begin{cases} \ddot{Y}(t) - Y(t) = u(t), \\ Y(0) = \varphi_0, \dot{Y}(0) = \omega_0, \end{cases}$$

que no es más que el sistema linealizado (4). Hemos así justificado la fórmula de calcular  $D\Lambda(0, 0, 0)$ .

El Teorema 6 nos dice que  $D\Lambda(0, 0, 0)$  es sobreyectiva. De esta forma, podemos restringirla a un subespacio vectorial  $E$  de  $\mathbb{R}^2 \times L^\infty(0, T)$  de dimensión 4 tal que

$$D\Lambda(0, 0, 0) : (\varphi_0, \omega_0, u) \in E \longrightarrow (\varphi_0, \omega_0, \varphi(T), \dot{\varphi}(T)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

es biyectiva. Podemos aplicar el Teorema de la Función Inversa para deducir que  $\Lambda$  es invertible en torno a  $(0, \Lambda(0) = 0)$ , es decir, que existe una vecindad  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  y  $\Pi : V \rightarrow E$  una función  $C^1$  tal que  $\Pi(0) = 0$  y

$$\Lambda\left(\Pi(\varphi_0, \omega_0, \varphi_T, \omega_T)\right) = (\varphi_0, \omega_0, \varphi_T, \omega_T), \quad \forall (\varphi_0, \omega_0, \varphi_T, \omega_T) \in V.$$

Vemos que  $\Pi(\varphi_0, \omega_0, \varphi_T, \omega_T)$  nos entrega el control  $u$  que lleva el sistema no lineal desde el estado inicial  $(\varphi_0, \omega_0)$  al estado final  $(\varphi_T, \omega_T)$  bajo la condición que estos estén en una vecindad en torno al punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$ . Hemos demostrado de esta forma el siguiente resultado.

**Teorema 8** *Para cualquier tiempo  $T > 0$  el sistema (6) es localmente controlable en torno al punto de equilibrio  $(\varphi_e = 0, \omega_e = 0, u_e = 0)$ .*

**Observación 9** *Aplicando la misma estrategia también puede demostrarse que el sistema (6) es localmente controlable en torno al punto de equilibrio  $(\varphi_e = \pi, \omega_e = 0, u_e = 0)$ .*

Pasar de un resultado lineal al no lineal no solo es posible para el sistema del péndulo sino que en general como lo afirma el siguiente teorema, cuya demostración es similar a la que hemos hecho y puede ser encontrada por ejemplo en [1].

**Teorema 10** *Consideremos el sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$ , y  $(x_e, u_e)$  un punto de equilibrio (es decir  $f(x_e, u_e) = 0$ ). Si el sistema de control linealizado en torno a  $(x_e, u_e)$ , dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

*es controlable, entonces, el sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  es localmente controlable en torno a  $(x_e, u_e)$ .*

## 4. Estabilización

En esta parte buscaremos controles que hagan que la solución converja asintóticamente a un punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a  $\infty$ . Esto es de particular importancia cuando queremos que el sistema converja a un punto de equilibrio que es inestable en la ausencia de control.

Veamos en el siguiente ejemplo qué pasa cuando busco un control a lazo abierto, lo que quiere decir que lo construyo específicamente para una condición inicial. Consideremos el sistema lineal (4) con las condiciones iniciales

$$\varphi_0 = 1, \omega_0 = -2.$$

Busquemos un control  $u$  tal que la solución de (4) tienda a  $(\varphi_e = 0, \omega_e = 0)$ , es decir, que satisfaga  $\varphi \rightarrow 0$  y  $\dot{\varphi} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Inspeccionando, podemos encontrar que el control  $u(t) = 3e^{-2t}$ , nos da la solución  $\varphi(t) = e^{-2t}$  que cumple con lo pedido.

El problema aparece al considerar una perturbación, aunque sea pequeña, de la condición inicial. Fácilmente se verifica que para cualquier  $\epsilon > 0$ , la solución del sistema

$$(15) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = 3e^{-2t}, \\ \varphi(0) = 1, \dot{\varphi}(0) = -2 + \epsilon, \end{cases}$$



está dada por

$$\varphi = e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} (e^t - e^{-t})$$

y así vemos que  $\varphi \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este es un ejemplo en donde dependiendo de las condiciones iniciales se puede encontrar un control en lazo abierto pero este control no es robusto ya que una mínima perturbación de la condición inicial produce la divergencia de la solución.

Esto nos dice que debemos buscar otras estrategias para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio inestable ( $\varphi_e = 0, \omega_e = 0$ ). Buscaremos controles que dependan, en cada instante de tiempo, del estado del sistema en ese mismo instante y no de las condiciones iniciales y finales. Este tipo de controles, llamados de lazo cerrado o feedback, son más robustos ya que son adaptables a posibles errores de medición o a posibles perturbaciones. Este tipo de controles no dependen de la condición inicial como sí ocurre en el estudio de la controlabilidad.

Demos algunas definiciones necesarias para nuestro análisis.

**Definición 11** Diremos que el control  $u = K(\varphi, \dot{\varphi})$  estabiliza asintóticamente el sistema lineal (4) hacia el equilibrio  $(\varphi_e, \omega_e)$  si para toda condición inicial  $\varphi_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$ , la solución de (4) con  $u = K(\varphi, \dot{\varphi})$  satisface  $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow (\varphi_e, \omega_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Definición 12** Diremos que el control  $u = K(\varphi, \dot{\varphi})$  estabiliza asintóticamente y localmente el sistema no lineal (3) hacia el equilibrio  $(\varphi_e, \omega_e)$  si existe  $\epsilon > 0$  tal que para toda condición inicial  $\varphi_0, \omega_0$  tal que

$$|\varphi_0 - \varphi_e| \leq \epsilon, \quad y \quad |\omega_0 - \omega_e| \leq \epsilon,$$

la solución de (3) con  $u = K(\varphi, \dot{\varphi})$  satisface  $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \rightarrow (\varphi_e, \omega_e)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 4.1. Sistema lineal

### 4.1.1. Método de lazo cerrado I

El término lazo cerrado o feedback da cuenta de que el control depende del estado del sistema. Uno define cómo se comportará el control dependiendo del estado presente del sistema. Diremos del control empleado en esta subsección, que es un lazo cerrado parcial, ya que el control solo depende de una parte del estado, en este caso de  $\varphi$ , pero no de  $\dot{\varphi}$ .

Recordemos que el sistema de control se escribe

$$(16) \quad \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0, \end{cases}$$

donde  $\varphi_0$  y  $\omega_0$  son las condiciones iniciales. Queremos encontrar un control que dependa del estado de la forma

$$(17) \quad u(t) = K(\varphi(t)),$$

con  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  alguna función lineal, de tal manera que las soluciones de (16)-(17) satisfagan  $\varphi(t) \rightarrow 0$  y  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para cualquier condición inicial  $(\varphi_0, \omega_0)$ .

Analicemos la situación. Si estamos a la izquierda de la vertical ( $\varphi = \theta - \pi > 0$ ), hay que moverse a la derecha y por lo tanto debemos aplicar un torque negativo (para el signo del torque, usamos la convención de la mano derecha). De la misma forma, si estamos a la derecha de la vertical ( $\varphi = \theta - \pi < 0$ ), debemos aplicar un torque positivo. Esta idea podría implementarse con un control de la forma

$$(18) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t),$$

donde  $\alpha > 0$  es una constante que podemos elegir como mejor nos convenga.

Reemplazando (18) en (16) obtenemos

$$(19) \quad \ddot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (19), encontramos su polinomio característico,

$$\lambda^2 + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones vienen dadas por  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{1 - \alpha}$ . Analizaremos las posibles situaciones dependiendo del valor que escojamos para el parámetro  $\alpha$ .

- **Caso**  $\alpha < 1$ . La solución de (16)-(18) es

$$\varphi = C_1 e^{t\sqrt{1-\alpha}} + C_2 e^{-t\sqrt{1-\alpha}},$$

la que diverge si  $C_1 \neq 0$ . Esta situación divergente se da para todos los datos iniciales que satisfacen

$$\varphi_0 \sqrt{1 - \alpha} + \omega_0 \neq 0,$$

por lo que vemos que esta elección de  $\alpha$  no nos da la estabilidad del punto de equilibrio.

- **Caso**  $\alpha = 1$ . En este caso tenemos  $\ddot{\varphi}(t) = 0$ , por lo que  $\dot{\varphi}(t)$  es constante. Así por ejemplo, si  $\varphi_0 = \epsilon$  y  $\omega_0 = 0$ , con  $\epsilon > 0$  una constante, entonces la solución viene dada por  $\varphi(t) = \epsilon$ , lo que claramente no converge a 0. Pero la situación puede ser peor. Si  $\varphi_0 = 0$  y  $\omega_0 = \epsilon$ , entonces la solución es  $\varphi(t) = t\epsilon$ , la cual diverge.

- **Caso**  $\alpha > 1$ . En este caso  $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha - 1}$  y las soluciones serán oscilatorias

$$\varphi = C_1 \cos(t\sqrt{\alpha - 1}) + C_2 \sin(t\sqrt{\alpha - 1}).$$

En este caso, no hay divergencia pero las soluciones no convergen al origen cuando el tiempo se va a  $\infty$ . Se dice que hay una estabilidad en torno al punto de punto de equilibrio inestable pero nosotros queremos que el punto sea asintóticamente estable.

De esta forma, vemos que un control de la forma (18) solo nos da la estabilidad del punto de equilibrio cuando  $\alpha > 1$ , pero nunca la estabilidad asintótica. Debemos seguir buscando.

### 4.1.2. Método de lazo cerrado II

Ahora buscaremos un control que depende en cada instante del estado completo formado por  $\varphi$  y  $\dot{\varphi}$ . Queremos encontrar un control que dependa del estado de la forma

$$(20) \quad u(t) = K(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)),$$

con  $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  alguna función, de tal manera que las soluciones de (16)-(20) satisfagan  $\varphi(t) \rightarrow 0$  y  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Veremos que en este caso sí lograremos que el punto de equilibrio del péndulo (inestable en la ausencia de control) sea asintóticamente estable.

En el intento anterior veíamos que la mejor elección de  $\alpha$  era tomar  $\alpha > 1$ , ya que no había divergencia, sino una oscilación con amplitud constante en torno al punto de equilibrio. La idea ahora, es introducir cierta disipación de la energía que nos permita disminuir con el curso del tiempo la amplitud de esta oscilación. Cuando  $\alpha > 1$ , el torque es aplicado en la dirección correcta pero es muy fuerte y crea la oscilación. La idea a implementar ahora es la de penalizar de cierta forma la velocidad del péndulo.

Busquemos un control a lazo cerrado de la forma

$$(21) \quad u(t) = -\alpha\varphi(t) - \beta\dot{\varphi}(t),$$

donde  $\beta > 0$  es una constante.

Reemplazando (21) en (16) obtenemos

$$(22) \quad \ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = 0.$$

Para resolver (22), encontramos su polinomio característico

$$\lambda^2 + \beta\lambda + (\alpha - 1) = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}.$$

En este caso vemos que al imponer  $\alpha > 1$ , estamos asegurando que  $Re(\lambda_{\pm}) < 0$  (donde  $Re(z)$  es la parte real de  $z$ ), lo que implica la convergencia a cero de todas las soluciones de (16)-(21), es decir la estabilidad asintótica del punto de equilibrio ( $\varphi_e = 0, \omega_e = 0$ ) que era inestable sin control.

Observemos que dado  $\alpha$  fijo, podemos anular cualquier posibilidad de oscilación al imponer

$$\beta^2 \geq 4(\alpha - 1).$$

Nos gustaría aumentar el valor del coeficiente  $\beta$  y esperar una tasa de convergencia mayor. Lamentablemente, esto no es cierto si solo aumentamos  $\beta$  sin mover  $\alpha$  ya que la mayor de las raíces del polinomio característico tiende a 0.

En este caso, si queremos una tasa de convergencia tan alta como queramos, podemos elegir  $\beta$  suficientemente grande y  $\alpha$  tal que  $\beta^2 = 4(\alpha - 1)$ , es decir,  $\alpha = 1 + \beta^2/4$ .

### 4.1.3. Función de Lyapunov

El análisis espectral anterior nos da información muy precisa del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (22). Lamentablemente, este método no es adaptable para considerar el sistema no lineal original. Para poder hacer esto, aplicaremos otro método que recibe el nombre de Funciones de Lyapunov. La buena noticia es que podremos pasar al no lineal. Sin embargo, no obtendremos un decaimiento tan bueno como con el análisis espectral. Así, construiremos un control a lazo cerrado que nos dará la convergencia exponencial pero no podremos seleccionar la tasa de decaimiento tan grande como queramos.

Consideremos  $\delta > 0$  y la función

$$(23) \quad V(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}|\dot{\varphi}|^2 + \frac{(\alpha - 1)}{2}|\varphi|^2 + \delta\varphi\dot{\varphi}.$$

Podemos demostrar que

$$(24) \quad \frac{\delta}{2}(|\varphi|^2 + |\dot{\varphi}|^2) \leq V(\varphi, \dot{\varphi}) \leq \frac{\max\{1, \alpha - 1\} + \delta}{2}(|\varphi|^2 + |\dot{\varphi}|^2).$$

Para la primera desigualdad se requiere que  $2\delta < \min\{1, \alpha - 1\}$ . La segunda se tiene siempre. Estas desigualdades son importantes ya que nos dicen que si obtenemos el decaimiento de  $V$  hacia 0, entonces también tendremos el del estado  $(\varphi, \dot{\varphi})$  hacia  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Derivando, usando (22) y haciendo algunas estimaciones del tipo  $2ab \leq a^2 + b^2$ , vemos que podemos elegir  $\mu > 0$  tal que

$$(25) \quad \frac{d}{dt}V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq -\mu V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)).$$

Para esto, necesitamos imponer tres condiciones:

$$(26) \quad 2\beta - 2\delta \geq \mu$$

$$(27) \quad 2\delta \geq \mu$$

$$(28) \quad \beta \geq \mu.$$

Para resumir, concluimos finalmente (25) si hacemos la siguiente elección de parámetros:

$$\alpha > 1, \quad \beta > 0, \quad \delta < \min\{\beta, 1/2, (\alpha - 1)/2\}, \quad 0 < \mu \leq \min\{\beta, 2\delta, 2\beta - 2\delta\}$$

En la expresión  $\dot{V} \leq -\mu V$ , multiplicamos por  $e^{t\mu}$ , integramos en  $(0, t)$  y se obtiene

$$V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq e^{-t\mu}V(\varphi(0), \dot{\varphi}(0)).$$

Utilizando esta desigualdad y (24), llegamos a que la solución de (22) con condiciones iniciales  $\varphi(0) = \varphi_0$  y  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ , satisface

$$\left(|\dot{\varphi}(t)|^2 + |\varphi(t)|^2\right) \leq Ce^{-t\mu} \left(|\omega_0|^2 + |\varphi_0|^2\right), \quad \forall t \geq 0,$$

en donde  $C > 0$  es una constante. Esto nos dice que el control  $u = -\alpha\varphi - \beta\dot{\varphi}$  estabiliza asintóticamente el sistema lineal (4) hacia el equilibrio  $(\varphi_e = 0, \omega_e = 0)$ .

Notemos dos cosas. Primero, el decaimiento es explícitamente exponencial y decimos que la tasa de decaimiento es  $\mu$ . Segundo, esta tasa  $\mu$  no puede ser elegida tan grande como queramos ya que debemos satisfacer ciertas condiciones. En particular,  $\mu \leq 2\delta \leq 1$ . Así, este método de Lyapunov no es tan bueno como el análisis espectral para darnos un decaimiento tan rápido como queramos, pero como ya mencionamos, la gran ventaja de este método es que nos permitirá obtener un decaimiento para el sistema no lineal, como veremos en la siguiente sección.

## 4.2. Sistema no lineal

El control de la sección anterior fue construido para el sistema lineal (16). Veamos que a partir de esto podemos concluir un resultado local de estabilidad asintótica para la ecuación no lineal (3) con el control en lazo cerrado (21). En la ecuación (3) elegimos el control dado por (21) y escribimos

$$(29) \quad \ddot{\varphi}(t) + \beta\dot{\varphi}(t) + (\alpha - 1)\varphi(t) = \sin(\varphi(t)) - \varphi(t).$$

Derivando con respecto al tiempo la función de Lyapunov

$$(30) \quad V(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}|\dot{\varphi}|^2 + \frac{(\alpha - 1)}{2}|\varphi|^2 + \delta\varphi\dot{\varphi},$$

usando (29) y haciendo algunas estimaciones como en el caso lineal, vemos que eligiendo el mismo  $\mu > 0$  de antes, se obtiene

$$(31) \quad \frac{d}{dt}V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq -\mu V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) + \dot{\varphi}(t)[\sin(\varphi(t)) - \varphi(t)] + \delta\varphi(t)[\sin(\varphi(t)) - \varphi(t)].$$

La idea es ver que los dos últimos términos en (31) son pequeños en comparación a  $-\mu V$  (al menos para condiciones iniciales cercanas al equilibrio), y así obtendremos el decaimiento deseado. Omitiremos de ahora en adelante la dependencia de  $t$ .

Una aplicación sencilla del teorema de Taylor con resto nos dice que

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{1}{2}|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando esto en (31) llegamos a

$$\dot{V} \leq -\mu V + \frac{1}{2}\dot{\varphi}|\varphi|^2 + \frac{\delta}{2}|\varphi|^3 \leq -\frac{\mu}{2}V - \frac{\mu}{2}\frac{|\dot{\varphi}|^2}{2} - \frac{\mu}{2}(\alpha - 1)\frac{|\varphi|^2}{2} - \frac{\mu}{2}\delta\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}|\varphi|^2 + \frac{\delta}{2}|\varphi|^3.$$

Consideremos  $\lambda > 0$  (a ser elegido más tarde) e imponemos que

$$(32) \quad V(t_0) \leq \lambda^2$$

para algún  $t_0 \geq 0$ . De esta forma, usamos (24) y obtendremos

$$(33) \quad |\varphi(t_0)|^2 + |\dot{\varphi}(t_0)|^2 \leq \frac{2}{\delta}\lambda^2,$$

lo que implica en particular que

$$(34) \quad |\varphi(t_0)| \leq \lambda_\delta := \lambda\sqrt{\frac{2}{\delta}} \quad \text{y} \quad |\dot{\varphi}(t_0)| \leq \lambda_\delta := \lambda\sqrt{\frac{2}{\delta}},$$

en donde hemos definido por comodidad  $\lambda_\delta$ . Acotamos los términos de más alto orden,

$$\frac{1}{2}|\dot{\varphi}(t_0)||\varphi(t_0)|^2 \leq \frac{\lambda_\delta}{2}|\varphi(t_0)|^2 \quad \text{y} \quad \frac{\delta}{2}|\varphi(t_0)|^3 \leq \delta\frac{\lambda_\delta}{2}|\varphi(t_0)|^2$$

y podemos escribir

$$\dot{V} \leq -\frac{\mu}{2}V + \frac{\mu}{2}(\delta - 1)\frac{|\dot{\varphi}|^2}{2} + \left(-\mu\frac{(\alpha - 1)}{2} + \delta\lambda_\delta + \lambda_\delta + \mu\frac{\delta}{2}\right)\frac{|\varphi|^2}{2}$$

en  $t = t_0$ . Sabemos que  $2\delta < \min\{1, \alpha - 1\}$  y al imponer

$$(35) \quad \lambda_\delta < \frac{\mu\sqrt{\delta}(\alpha - 1 - \delta)}{2(\delta + 1)}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \lambda < \frac{\mu(\alpha - 1 - \delta)}{2\sqrt{2}(\delta + 1)},$$

se concluye que

$$(36) \quad \dot{V}(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) \leq -\frac{\mu}{2}V(t_0).$$

Obtenemos así que  $V(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$  es decreciente en  $t_0$ . Existirá  $t_1 > t_0$  tal que (32) se verifica en  $t_1$  por lo que se concluye al igual que antes que (36) también se cumple en  $t_1$ . Este argumento nos lleva a que (36) se cumple no solo en  $t_0$ , si no que tenemos

$$\dot{V}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq -\frac{\mu}{2}V(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

que nos dice que el estado  $(\varphi, \dot{\varphi}) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En nuestro caso, debemos asegurar (32) para  $t = 0$  lo que obtendremos imponiendo una condición sobre el módulo de las condiciones iniciales. Falta traducir (32) y (35) en una condición del tipo

$$(37) \quad \sqrt{|\varphi_0|^2 + |\omega_0|^2} \leq \varepsilon,$$

con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Impondremos

$$(38) \quad \frac{\max\{1, \alpha - 1\} + \delta}{2} (|\varphi_0|^2 + |\omega_0|^2) \leq \lambda^2,$$

con  $\lambda$  satisfaciendo (35), lo que gracias a (24) asegura (32), es decir, que  $V(0) \leq \lambda^2$ .

Podemos escribir (38) en la forma (37) definiendo

$$\varepsilon := \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{\delta + \max\{1, \alpha - 1\}}}.$$

Hemos demostrado así el siguiente resultado.

**Teorema 13** *El control  $u = -\alpha\varphi - \beta\dot{\varphi}$  estabiliza local y asintóticamente el sistema no lineal (3) hacia el equilibrio  $(\varphi_e = 0, \omega_e = 0)$ .*

Al igual que en la sección sobre controlabilidad, esta estrategia de linealizar primero no solo funciona para el péndulo sino que para sistemas más generales. Se tiene el teorema siguiente.

**Teorema 14** *Consideremos el sistema de control  $\dot{x} = f(x, u)$ , que tiene  $(x_e, u_e)$  como punto de equilibrio (es decir  $f(x_e, u_e) = 0$ ). Si el control  $u = Kx$  estabiliza asintóticamente el sistema linealizado en torno a  $(x_e, u_e)$ , dado por*

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e)x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)u,$$

*entonces, el control  $u = K(x - x_e) + u_e$  estabiliza local y asintóticamente el sistema no lineal*

$$\dot{x} = f(x, u)$$

*hacia el punto de equilibrio  $(x_e, u_e)$ .*

## Referencias

- [1] Jean-Michel Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. xiv+426 pp.
- [2] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992. xii+564 pp.
- [3] Henk Nijmeijer, Arjan van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990. ix+467 pp.
- [4] Eduardo D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, Deterministic finite-dimensional systems, Second edition, Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998. xvi+531 pp.
- [5] Emmanuel Trélat, *Contrôle Optimal, Théorie & Applications*. Mathématiques Concrètes, Vuibert, Paris, 2005. vi+246 pp.